

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ



**Функции холоморфни над крайномерни комплексни комутативни
асоциативни алгебри – някои локални, глобални и универсални
аспекти**

ОТ

Марин Владимиров Генов

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

ЗА

ПРИСЪЖДАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНА И НАУЧНА СТЕПЕН

„ДОКТОР“

В

ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ 4.5 МАТЕМАТИКА

(ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ)

Научен ръководител: акад. Веселин Дренски

София, 2026

Посвещение и благодарности

В памет на майка ми, която изгради отношението ми към математиката.

Част от резултатите, представени в тази дисертация, възникнаха под една или друга форма по време на магистърското ми обучение във Факултета по математика и информатика на Софийския университет преди години под ръководството на чл.-кор. Емил Хорозов, който за съжаление почина през януари тази година. Той ми даде възможността и свободата да се задълбоча в тази тема във важен за мен момент, а без неговата мъдрост и насърчение това начинание вероятно не би стигнало до тук. Затова настоящата дисертация е посветена и на неговата памет. Благодарен съм също на проф. А. Каспарян и акад. С. Иванов за многобройните стимулиращи разговори през онзи период във ФМИ, и съм дълбоко признателен на акад. В. Дренски за неговата неизменна подкрепа и незаменимо напътствие през последните няколко години в ИМИ-БАН. Не на последно място, дълбоко благодарен съм на проф. Величка Милушева за нейната неизчерпаема морална подкрепа и трезва преценка по всички въпроси, както и за това, че винаги ми е помагала в ключови моменти да навигирам административната страна на процеса — буквално още от първия ден, в който прекрачих прага на ИМИ-БАН, до ден днешен. Всички грешки са мои и само мои.

Съдържание

Посвещение и благодарности	i
Конвенции и означения	iii
Въведение и структура	1
0. Предварителни сведения и дефиниции	12
1. Диференциране над $\mathcal{A}$	17
1.1. Диференциране по отношение на представяне	17
1.2. Канонични факторизации и продължения	22
1.3. Хомогенни уравнение на Коши–Риман–Шеферс	25
1.4. Асоциираната диференциална 1-форма и интегрируемост	26
2. Интегриране над $\mathcal{A}$	27
2.1. Допустими точки и допустими 1-цикли	27
2.2. Обобщен аналитичен индекс на 1-цикъл	28
2.3. Обобщени интегрални формули на Коши с индекс	29
2.4. Обобщена интегрална формула на Коши–Помпею	31
3. Научни приноси на дисертацията	32
Библиография	34
Публикации на автора свързани с дисертацията	34
Алгебрични аспекти	34
Комплексен анализ (разнообразни)	34
Класическа и класическа аналитична геометрия над алгебри	34
Ниско-размерен и специален комутативен $\mathcal{A}$ -анализ	35
Теми в ниско-размерния комутативен $\mathcal{A}$ -анализ	36
Крайномерен комутативен реален $\mathcal{A}$ -анализ	36
Крайномерен комутативен комплексен $\mathcal{A}$ -анализ	36
Крайномерен некомутативен $\mathcal{A}$ -анализ (подход чрез диференциални оператори)	37
Некомутативен $\mathcal{A}$ -анализ (Методи от Банаховите алгебри и некомутативни сходящи редове)	37
Крайномерен неасоциативен $\mathcal{A}$ -анализ	38
$\mathcal{A}$ -многообразия по отношение на ниско-размерни $\mathcal{A}$	38
Общи крайномерни реални $\mathcal{A}$ -многообразия	39
Общи крайномерни реални $\mathcal{A}$ -многообразия (функтори на Вейл)	39
Кохомологични теории за $\mathcal{A}$ -многообразия	39
Безкрайномерен комутативен комплексен Банахов $\mathcal{A}$ -анализ	40
Безкрайномерен комутативен $\mathcal{A}$ -анализ за топологични алгебри и модули, Нелинейни теореми на Serre-Swan	40

Конвенции и означения

При зададена директна сума $V \oplus W$ ще пишем $v \oplus w$, за да подчертаем, че сумата $v + w$ е взета по отношение на даденото директно разлагане, в частност $v \in V$ and $w \in W$. Също така ще пишем $\bigoplus_R$ и $\oplus_R$, за да индицираме над кой пръстен директното разлагане е изпълнено (напр. директното разлагане може да е изпълнено само след рестрикция на скаларите). Такова означаване е всъщност напълно консистентно с употребата $\bigotimes_R$ и $\otimes_R$.

Спектралната норма върху матрици ще бъде означавана с $\|\cdot\|_{\text{sp}}$ вместо с $\|\cdot\|_2$, за да се избегне конфликт на означенията с Евклидовата норма (матриците също са вектори все пак).

Ще използваме един и същи символ, за да означим както дадена крива $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ като изображение, така и нейния образ. По-общо, ще използваме един и същи символ за означаване на даден цикъл Γ and неговия съпорт, напр. $\int_{\Gamma} \omega$. Освен това затворени контури $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ винаги ще бъдат параметризирани като $\gamma(t)$ за $t \in [0, 1]$.

В присъствието на тензори винаги ще се опитае да означаваме свободните индекси с i, j, k, ℓ , а сумираните индекси с r, s, t (освен ако не забравим).

За отворени множества $U_i, U_j, U_k, \dots$ дефинираме $U_{ij} := U_i \cap U_j$, $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$ и т.н.

Всички пръстени са асоциативни, освен където не е споменато изрично нещо друго.

$:=$ дефиниция чрез полагане

$\stackrel{\text{def}}{=}$ равенство, което следва директно от дефиницията

$\mathbb{N}$: **естествените числа** $\{1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$[n] := \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ за някое $n \in \mathbb{N}$.

$\times_{i=1}^n x_i \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n)$: кратко означение на елемент на Декартовото произведение $\prod_{i=1}^n X_i$.

$\times_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$: Декартово произведение на изображения $f_i: X_i \rightarrow Y_i$, $i \in I$.

$R^\times$: група на единиците (обратимите елементи) (мултипликативна група на) $R \in \text{Ring}$, също означена като $U(R) := R^\times$.

$\text{Sing}(R) := R \setminus R^\times$: сингулярно множество на $R \in \text{Ring}$.

$\mathfrak{J}(R)$: радикал на Якобсон на R .

$J_{\mathbb{K}} F$: ($\mathbb{K}$ -)Якобиан на изображение F .

$\text{nil}(\mathcal{A})$: множество на нилпотентните елементи на $\mathcal{A} \in \text{Alg}_R$, т.е. нилрадикал на $\mathcal{A}$ за $\mathcal{A} \in \text{CAlg}_R$.

$\mathbb{K}$: полето $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

$\mathfrak{S}_n$: симетричната група на $[n]$.

CAT : категорията на всички категории.

Cat : категорията на всички *локално* малки категории, $\text{Cat} \in \text{CAT}$.

Set : категорията на множествата.

Ab : категорията на абелевите групи.

$\text{Vec}(K) = \text{Vec}_K$: категорията на K -векторните пространства.

$\text{FdVec}(K) = \text{FdVec}_K$: подкатегорията на Vec_K на крайномерните K -векторни пространства.

Grp : категорията на групите.

Ring : категорията на некомутативните унитарни пръстени.

CRing : категорията на комутативните унитарни пръстени

$\text{Mod}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mod}_R$: категория на R -модулите над $R \in \text{CRing}$.

$\text{LMod}(R)$: категория на левите R -модули над $R \in \text{Ring}$.

$\text{RMod}(R)$: категория на десните R -модули над $R \in \text{Ring}$.

$\text{FdMod}(\mathcal{A})$: категория на модулите на $\mathbb{K}$ -алгебра $\mathcal{A}$, които са крайномерни спрямо $\mathbb{K}$.

$\text{Alg}(R) = \text{Alg}_R$: категорията на унитарните асоциативни алгебри над $R \in \text{CRing}$.

Alg_R^* : категорията на *неунитарните* асоциативни алгебри над $R \in \text{CRing}$.

$\text{CAlg}(R) = \text{CAlg}_R$: категорията на унитарните комутативни асоциативни алгебра над $R \in \text{CRing}$.

$\text{FdAlg}(K) = \text{FdAlg}_K$: категорията на крайномерните унитарни асоциативни K -алгебри.

$\text{FdCAlg}(K) = \text{FdCAlg}_K$: категорията на крайномерните унитарни комутативни асоциативни K -алгебри.

LocArt_κ : категория на локалните Артинови пръстени с *коэффициентно поле от остатъци* κ .

$\text{Ban}(\mathbb{K}) = \text{Ban}_\mathbb{K}$: категория на Банаховите пространства над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (с ограничени линейни изображения като морфизми).

$\text{BanAlg}(\mathbb{K}) = \text{BanAlg}_\mathbb{K}$: категорията на унитарните Банахови алгебри над $\mathbb{K}$.

$\text{CBanAlg}(\mathbb{K}) = \text{CBanAlg}_\mathbb{K}$: подкатегорията на комутативните унитарни Банахови алгебра над $\mathbb{K}$.

$\text{BanAlg}(\mathcal{A}) = \text{BanAlg}_\mathcal{A}$: категорията на Банаховите $\mathcal{A}$ -алгебри над $\mathcal{A} \in \text{CBanAlg}_\mathbb{K}$.

$A^T \in R^{m \times n}$: транспонирана на $A \in R^{n \times m}$.

$\text{supp}(f)$, $\text{supp}(\Gamma)$: съпорт на функция f или на (топологичен) цикъл Γ (коренно различни дефиниции, но едно и също означение).

$\mathbb{D}_r(z_0)$: отворен диск с радиус r около $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{D}_r^*(z_0)$: прободен отворен диск с радиус r около $z_0 \in \mathbb{C}$.

$\Delta_r(z)$: отворен полидиск с радиус r около $z \in \mathbb{K}^n$.

$\overline{\Delta}_r(z)$: затворен полидиск с радиус r около $z \in \mathbb{K}^n$.

$\mathbb{B}_r(z)$: отворена топка с радиус r около $z \in \mathbb{K}^n$.

$\overline{\mathbb{B}}_r(z)$: затворена топка с радиус r около $z \in \mathbb{K}^n$.

$\mathcal{C}^k(X, Y)$: пространство от k -кратно непрекъснато диференцируемите изображения $U \rightarrow V$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$.

$\mathcal{C}_{\text{pw}}^k(X, Y)$: пространство от *на парчета* k -кратно непрекъснато диференцируемите изображения $X \rightarrow Y$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$.

$\|f\|_K := \sup_{x \in K} \|f(x)\|$.

pt : едноточковото пространство.

$\triangle$: солиден триъгълник с граница $\partial\triangle$.

$\square$: два солидни триъгълника залепени един за друг за едната страна.

$\star$: звездообразно отворено множество.

$\Omega_{\text{dR}}^\bullet$: комплекс на de Rham.

$\Omega^\bullet := \Omega_{\text{hol}}^\bullet$: холоморфен комплекс на de Rham.

$\text{Crit}(f)$: критичен локус на диференцируемо изображение f .

$\text{Reg}(f)$: регулярен локус на диференцируемо изображение f .

$\mathcal{L}$: листо от дърво или храст.

Въведение и структура

Това въведение се нуждае от кратко собствено въведение. А именно, въведението е разделено на следните части:

- **Общият пейзаж:** тук очертаваме общия пейзаж на *теориите на функции* над алгебри и историческия път, по който те са възникнали.
- **Крайномерният комутативен случай:** следвайки предходната точка, насочваме вниманието към интересуващия ни случай, мотивирайки неговото изучаване и описвайки какво вече е направено.
- **Мотивация и цели на настоящата дисертация:** в контекста на предходната точка мотивираме мястото на настоящата дисертация в тази картина.
- **Диференцируемост относно представяне:** тук обсъждаме и мотивираме основните дефиниции и даваме необходимия за тях контекст, вкл. от съседни области.
- **Специалният случай на морфизъм:** тук обсъждаме специален и важен подслучай, който мотивираме и за който даваме известен контекст.
- **Преглед на настоящата дисертация и нови резултати:** подразбира се.
- **Алгебричният класификационен проблем:** тук засягаме проблема за класификацията на основните обекти, с които работим.
- **Пропуснати неща:** тук даваме кратък списък от важни теми, които по една или друга причина не са включени в настоящата дисертация.
- **Приложения:** тук споменаваме някои приложения на теорията.
- **Бележка относно терминологията:** тук добавяме към обръкването на читателя, вече създадено от предходните части на въведението.

Общият пейзаж. Започвайки от привидно простата дефиниция на комплексна диференцируемост, дадена чрез добре познатата граница на частното на разликите

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

за функция $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, отворено $U \subseteq \mathbb{C}$ и $z_0 \in U$, напълно *естествен* въпрос е дали е възможно да се възпроизведе безспорния успех на комплексния анализ и геометрия на една и няколко променливи като заменим $\mathbb{C}$ с друга $\mathbb{K}$ -алгебра $\mathcal{A}$ за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогава такава функция би се наричала $\mathcal{A}$ -диференцируема, или $\mathcal{A}$ -регулярна, или $\mathcal{A}$ -холоморфна и т.н. в зависимост от дадения контекст. В съответствие с традицията ще наричаме *Funktionentheorie*¹ (или *теория на функциите*) теория на функции на една променлива, която теория проявява поне някои (а в идеалния случай всички) от следните широко формулирани свойства:

- наличие на обобщени уравнения на Коши–Риман;
- наличие на обобщени интегрални теореми на Коши и Морера;
- наличие на обобщена интегрална формула на Коши;
- наличие на аналитичност.

Не бива да ни изненадва, че този въпрос в най-простата си форма датира още от края на XIX век сред бурното развитие, което комплексният анализ преживява по онова време в ръцете на гиганти като Хурвиц, Клайн, Пикар и Поанкаре (разбира се, стъпвайки върху раменете на по-ранното поколение гиганти на комплексния анализ на XIX век като Коши, Риман и Вайерщрас), и сред активните опити на много други автори да обобщят неговите впечатляващи резултати във всякакви възможни посоки (вж. например обзора на Хурвиц [Hur32] от началото на XX век). Може да се каже, че до известна степен това е вярно и до днес. По-точно, разглежданият въпрос е бил поставен за първи път и изучен по-подробно от Georg Scheffers през 1893 г. в двете му последователни статии [Sch93a] и [Sch93b], където, наред с други неща, той формулира съответна система от обобщени уравнения на Коши–Риман (вж. Раздел 1.3) при предположението за (комплексна) аналитичност на компонентите на f , а по-късно разглежда и подходящи групи от координатни преобразования в тон с това. През следващите години става пределно ясно, че е абсолютно необходимо да се прави разлика като минимум между следните фундаментално различни случаи и подслучаи:

- (1) $\mathcal{A}$ е *комутативна асоциативна* (обикновено унитарна) $\mathbb{K}$ -алгебра, т.е. $\mathcal{A} \in \text{CAlg}_{\mathbb{K}}$:
 - (i) $\mathcal{A}$ е *крайномерна* комутативна асоциативна $\mathbb{K}$ -алгебра, т.е. $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$:

¹заимствано от немски, буквално означава *теория на функциите*, традиционно немско название за теорията на холоморфните функции;

- (а) $\mathcal{A}$ е крайномерна комутативна асоциативна $\mathbb{R}$ -алгебра, т.е. $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{R}}$;
- (б) $\mathcal{A}$ е крайномерна комутативна асоциативна $\mathbb{C}$ -алгебра, т.е. $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{C}}$;
- (ii) $\mathcal{A}$ е *безкрайномерна* комутативна асоциативна $\mathbb{K}$ -алгебра;
- (2) $\mathcal{A}$ е крайномерна, *некомутативна*, асоциативна (обикновено унитарна) или неасоциативна $\mathbb{K}$ -алгебра;

Доста обширна библиография по темата до края на 30-те години може да се намери в [War40]. Доколкото ни е известно, няма публикувани опити за работна дефиниция в случая, когато $\mathcal{A}$ е *безкрайномерна неасоциативна* $\mathbb{K}$ -алгебра. Основната причина за разграничаването на (1) и (2) е съвсем проста: няколкото наивни дефиниции на разположение на комутативната теория се провалят драматично в некомутативната постановка, тъй като всички те резултират в прекалено тривиални *теории на функции* (вж. например [Ros00]). Въпреки това не е преувеличено да се каже, че тази история на неуспехи² в крайна сметка води до раждането на областите на кватернионния и, по-общо, на Клифордовия анализ, както и на други теории на функциите за по-обща некомутативна $\mathbb{K}$ -алгебра $\mathcal{A}$. Много накратко и грубо казано, има три групи подходи към *некомутативния $\mathcal{A}$ -анализ*:

- обобщени оператори на Коши–Риман–Фютер³ и оператори на Дирак (–Фютер) (и/или, дуално, условия върху диференциални форми, гарантиращи анулирането на съответните интеграли върху някакъв клас диференциални подмногообразия в духа на интегралната теорема на Коши);
- методи от теорията на Банаховите алгебри (вкл. матрични алгебри) (напр. спектрални методи) и некомутативна аналитичност (= некомутативни степенни редове) (като за начало препращаме заинтересования читател към [Die30], [Sch31], [Wag42], [AC55], [Bru58; Bru59], [Rin55; Rin57; Rin60; Rin61; RW62; RW64], [CH66; CH67], [Den67; Den70; Den71], [Sze78], [Sti87] в хронологичен ред);
- регулярност/диференцируемост „на парче“ (slice regularity) (напр. изискване за холморфност на ограниченията на f върху комплексните прави, породени от различните комплексни структури на $\mathcal{A}$) – това очевидно има известно припокриване с предходната точка.

Всъщност подходът на Дирак–Фютер се оказва добре приложим и към *крайномерния неасоциативен* случай (виж [Kra07]). Колкото до групата (1)(ii), нея ще я обсъдим в хода на изложението.

Крайномерният комутативен случай. Като оставим настрана това въведение, настоящата дисертация се занимава изключително и само с постановката (1)(i), с намигване към (1)(ii), както читателят вероятно ще забележи в Глава 1, макар крайната цел да е (1)(i)(b). Бихме твърдели, че крайномерният комутативен случай в известен смисъл е и най-фундаменталният, по няколко причини, някои по-малко очевидни от други:

- той е следващото най-непосредствено и пряко обобщение на $\mathbb{C}$, тъй като обхваща всички крайни комутативни пръстенни разширения на $\mathbb{R}$;
- той е „бебешкият“ случай сред различните постановки и трябва да служи като (по-силен от $\mathbb{C}$) прототип в следния смисъл: всяка обща крайномерна некомутативна (разбирана като не непременно комутативна) теория на функциите над $\mathcal{A} \in \text{FdAlg}_{\mathbb{K}}$ би трябвало да се свежда до него за $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, а всяка безкрайномерна (разбирана като не непременно крайномерна) комутативна теория на функции над $\mathcal{A} \in \text{CAlg}_{\mathbb{K}}$ също би следвало да се свежда до него за $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$;
- както читателят може би вече се е досетил, подходът чрез диференцируемост „на парче“ изглежда добре пригоден към функционални ограничения върху по-обща класове комутативни подалгебри на дадена крайномерна некомутативна алгебра;
- Wilkerson [Wil82] показва, че върху крайномерни комутативни $\mathbb{R}$ -алгебри могат да се получат „Дирак–Фютер-регулярни“ функции върху $\mathcal{A}$ от $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции в „стандартния“ смисъл⁴, при условие че самата $\mathcal{A}$ не е локална, тоест че $\mathcal{A}$ е *нетривиално произведение* на локални Артинови $\mathbb{R}$ -алгебри (според теоремата за разлагане на комутативни Артинови пръстени), което е донякъде изненадващо;
- в духа на предходната точка, ако човек е готов да се откаже от крайномерността, Краснов показва в [Kra03] и [Kra07], че много *крайномерни некомутативни* теории на функции (вкл. кватернионен и Клифордов анализ) съответстват в някакъв тесен смисъл на (безкрайномерни) *комутативни* (асоциативни) теории на функции *върху оператори*.

Предвид естествеността на крайномерната комутативна постановка и съпътстващия *елемент на изненада*, това, което все пак не бива да изненадва, е че много от нейните основни резултати са били независимо преоткривани в една или друга форма неколккратно в историята. Така например, елементарното из-

²вж. например историческия обзор в [DKM01];

³те не бива да се бъркат с *уравненията* на Коши–Риман–Шеферс за *крайномерни комутативни* $\mathbb{K}$ -алгебри (вж. Раздел 1.3), поради което предпочитаме терминологията на (обобщени) оператори на Дирак и Дирак–Фютер;

⁴той нарича първия вид накратко “F-регулярни” (по Fueter), а втория вид “S-регулярни” (по Scheffers), терминология, която изглежда е въведена от [Kri52];

ложение във [Fox49] изглежда да е първото систематично изследване на случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и по-специално формулира версия на *интегралната теорема* на Коши⁵ *при отсъствие на комплексна структура*. Предполагаме, че тя би трябвало да е била известна и по-рано, но не разполагаме с точен източник в подкрепа на това. *Реалната* интегрална теорема на Коши също е преоткрита в [Ped92], но е ясно, че вече е била известна и на [Hab76]. В този времеви интервал вероятно е имало и други нейни изложения. Допълнителни аспекти на теорията над $\mathbb{R}$ (частично включени и в по-ранни изложения) се обсъждат в [Wat92a; Wat92b], [GM96] и [Pog07]. Някои нискоразмерни и специални подслучаи на реалната постановка се появяват също в различни форми например в [Hor63], [BR73], [MR98], [KS05], [RS04] и [Di+23]. От друга страна, напълно сигурни сме, че първото систематично изложение на случая $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ е дадено още през 1928 г. от Р. Ketchum в [Ket28a]. Неговата статия може да се разглежда като *proof of concept*, поставящо основите на целия предмет над $\mathbb{C}$: той доказва, че основните стълбове на комплексния анализ на една променлива (уравненията на Коши–Риман, интегралната теорема на Коши, *интегралната формула* на Коши, аналитичността, развитието в ред на Laurent и др.) имат съответни аналози за всяка $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{C}}$. Следователно оставащият въпрос не е дали, а докъде може да се доведе тази аналогия, колко силни могат да бъдат съответните *основни* теореми и какви са евентуалните, неизбежни разлики спрямо комплексната равнина. В този смисъл следващият ключов резултат в историята на крайномерния комутативен комплексен $\mathcal{A}$ -анализ идва от G.B. Rizza, който доказва хомологична версия на интегралната формула на Коши в [Riz52a] и [Riz52b]. По-късно той дава по-систематично изложение на основната теория в [Riz54], основано върху тези му резултати. Не е изненада обаче, че комплексният случай страда от същата съдба като реалния, доколкото основната теория е била преоткривана независимо многократно в различни форми, например в [Ede73; Ede76b]. Доказателство на обобщена интегрална формула на Коши (и някои от обичайните ѝ следствия) е дадено и в [Shp15], започвайки от $\mathcal{A}$ -диференцируемост от тип Gateaux, която обаче може да се покаже „от първи принципи“, че е еквивалентна на стандартната(ите) дефиниция(и). Нискоразмерни и специални подслучаи на комплексната теория са изследвани в [Ril53], [NT55; NT56], [Goo88], [Pri91], [Ola02], [Rön08], [Alp+13], [Lun+15], [RS04] и вероятно други места. Отбелязваме, че всички тези теории на функции за нискоразмерни $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ имат разбира се естествени класическо-геометрични съответствия, започвайки с [Stu03]⁶, но също и [Grü06], [Tak40a; Tak41a], [Tak40b; Tak41b], [Tak40c; Tak41c] и други. На заинтересования читател препоръчваме книгите [Ben73], [Yag66], [Yag79], или към много краткото и секси изложение в [HH04], или към [Cer17] за част от историята на класическия тип геометрия над $\mathcal{A}$. Продължавайки нататък, по-скорошно и доста интересно развитие в нискоразмерната теория е построяването на аналога на хиперфункциите на Sato в бикомплексната постановка, виж [VV12], [Col+11] и [MS20; MS21; Mat22; Mat25]. Но въпреки някои такива изолирани напредъци огромният брой исторически „независими“ преоткривания само свидетелства за доста окаяното състояние, в което се намира предметът на крайномерния комутативен $\mathcal{A}$ -анализ, което само по себе си трябва да се приема като отрицателно *развитие*, имайки предвид неговите живи начала. Наистина, с някои забележителни изключения, областта показва тъжна тенденция авторите да берат (често едни и същи) най-ниско висящи плодове. Ние се стремим да поправим това, като оберем всички останали ниско висящи плодове. Неблагополучен, но не неочакван вторичен продукт на гореспоменатото развитие е и разпокъсаният характер на предмета. Waterhouse дори пише в [Wat92b]: „*The theory has been developed only in fits and starts, and some of the simple results we need seem not to be on record at all, while others are only recorded in language that is now hard to understand*“. Може да се каже дори, че топологията на самия предмет в обкръжаващото пространство-време има прекалено много свързани компоненти.

Мотивация и цели на настоящата дисертация. Но желанието ни да разгледаме наново и по-отблизо *крайномерната комутативна асоциативна теория* не е продиктувано единствено от донякъде незадоволителното, остаряло и фрагментирано състояние на предмета. Целта на настоящата работа е *многообразна*:

- да отдели зърното от плевата, в частност ясно да разграничи най-тривиалните аспекти на теорията от по-малко тривиалните, като по този начин идентифицира възможни основни въпроси, нуждаещи се от концептуално удовлетворителен отговор;
- и, правейки това, концептуално да изясни и осветли различни аспекти на теорията и да даде концептуално чисти описания на нейните обекти;
- с цел да консолидира основната теория и да оптимизира нейните доказателства;
- като използва подходящ „модерен“ математически език (всъщност най-вече просто базовия език на комутативната алгебра, алгебричната топология и диференциалната геометрия според днешните стандарти, контрастирано с нотационното и математическо „израждане“, което често се наблюдава

⁵да не се бърка с *интегралната формула* на Коши;

⁶това е същият E. Study, на когото е кръстена едната половина от метриката на Fubini–Study;

иначе);

- така предоставяйки стегнато, но цялостно систематично и донякъде задълбочено изследване на предмета (с едно око отворено към безкрайномерния комутативен случай);
- по начин, достъпен за широка аудитория от математици от различни области, тъй като предметът далеч не е достатъчно широко известен и заслужава повече внимание;
- но в крайна сметка да предостави солидни основи за развиване на геометрия над $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{C}}$ в духа на красивата теория на Римановите повърхнини и по-общата комплексно-аналитична геометрия.

Но докато гладките многообразия над „биреалните“ числа⁷ и над алгебри на Вейл⁸ са обстойно изучавани, като последният клас най-вече от Казанската геометрична школа⁹ на изток и в постановката на снопове и функтори на Вейл на запад¹⁰, и преживяват известен скорошен подем поради новооткрити връзки с геометрия на информацията в квантовата теория на полето, многообразия на Фробениус и пре-Фробениусовите многообразия на Манин (вж. [CM20], [CM22], както и [MS22]), комплексният аналог, доколкото ни е известно, е останал до голяма степен неизследван¹¹. Връщайки се към безкрайномерния комутативен случай, полезността на многообразия, моделирани върху комутативни Банахови алгебри, е разпозната от Кобаяши [Kob87] в постановката на пространства от изображения и по-късно от Н. Yagisita [Yag19a; Yag19b] в постановката на непрекъснати фамилии¹² от комплексни многообразия. Грубо казано, това е така, защото съответното Банахово многообразие става крайномерно-подобно над подходяща (безкрайномерна) Банахова алгебра $\mathcal{A}$. В крайномерния случай комплексните $\mathcal{A}$ -многообразия (и по-общо, $\mathcal{A}$ -аналитичните пространства) възникват естествено по различни начини, напр.:

- комплексните торове $\mathbb{C}^n/\Lambda$ автоматично стават $\mathcal{A}$ -криви чрез накрития $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\Lambda$;
- аналитификации на проективни пространства над $\mathcal{A}$;
- интересни действия на групи $G \curvearrowright \mathcal{A}$ като резултат от това, че $\mathcal{A} \in \text{LocArt}_{\mathbb{C}}$ обикновено има нетривиална положително-размерна група от автоморфизми;

и др.

Диференцируемост спрямо представяне. Вместо само алгебра $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, отправната точка на настоящата дисертация е крайномерно представяне $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$, или еквивалентно, $M \in \text{FgMod}(\mathcal{A})$. Тогава, при дадено отворено $U \subseteq \mathcal{A}$ и функция $f: U \rightarrow M$, наричаме $f(Z)$ ρ -диференцируема (гледна точка представяне), или еквивалентно $\mathcal{A}$ -диференцируема (гледна точка модул) в $Z_0 \in U$, ако съществува елемент (и нашата бъдеща производна) $f'(Z_0) \in M$ такъв, че

$$f(Z_0 + H) = f(Z_0) + H \cdot f'(Z_0) + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \rho(H)(f'(Z_0)) + r(H),$$

където различаваме три начина на базова ρ - (или $\mathcal{A}$ -) регулярност, пораждащи три различни базови структурни снопа върху $|\mathcal{A}|$ (подлежащото топологично пространство на $\mathcal{A}$ за аналитичната топология), в зависимост от условието, което поставяме върху остатъчния член $r(H)$:

- (1) *Класическа, или пределна, ρ -диференцируемост $\mathcal{L}_{\rho}$:*

$$\lim_{H \rightarrow 0} \rho(H)^{-1}(r(H)) = 0,$$

съответстваща на *класическата пределна* дефиниция чрез частно на разликите (грубо казано; виж Раздел 1.1 за точните детайли);

- (2) *Строга $\mathcal{A}$ -еквивариантна Фреше-диференцируемост $\mathcal{F}_{\rho}^{\text{str}}$:*

$$\|r(H)\|_M = o(\|\rho(H)\|_{\text{End}_{\mathbb{K}}(M)})$$

за $H \rightarrow 0$;

- (3) *$\mathcal{A}$ -еквивариантна¹³ Фреше-диференцируемост $\mathcal{F}_{\rho}$:*

$$\|r(H)\|_M = o(\|H\|_{\mathcal{A}})$$

⁷вж. например обзора [CFG96] на многообразия с (почти) $\mathcal{A}$ -структура, където $\mathcal{A} = \mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}[j] \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, както и [GGM02] и [GGM03];

⁸комутативни локални Артинови $\mathbb{R}$ -алгебри с поле на остатъците $\mathbb{R}$;

⁹вж. например книгата [VSS85] или по-скорошния обзор на Shurygin [Shu02], вкл. библиографията там, или книгата на Салимов [Sal23] за някои по-актуални развития;

¹⁰вж. например съответните глави в [KMS93] и библиографията там, но също, независимо от идеите на Вейл, [BC74] върху интегрируеми почти-допирателни (т.е. $\mathbb{R}[x]/(x^2)$) структури;

¹¹с изключение на някои изолирани случаи, разгледани в [Sal23] – читателят не бива да се обърква от употребата на термина “холоморфен” от Салимов; терминът е използван (донякъде щедро), за да означа $\mathcal{A}$ -диференцируемост, дори когато самата алгебра $\mathcal{A}$ не носи комплексна структура;

¹²за разлика от комплексно-аналитичните фамилии в деформационната теория на Kodaira–Spencer

¹³Ако човек предпочита представяния на групи вместо представяния на алгебри, тогава по плътностни причини $\mathcal{A}$ -еквивариантността е еквивалентна на $\mathcal{A}^{\times} \cong \mathbb{G}_m^k \times \mathbb{G}_a^{\ell}$ -еквивариантност за някакви $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. Разбира се, нетривиалната част е да се опише действието на векторната група $\mathbb{G}_a^{\ell}$.

за $H \rightarrow 0$.

Ще използваме термините ρ -диференцируем и $\mathcal{A}$ -диференцируем взаимозаменяемо, в зависимост от това коя перспектива е най-удобна. Тъй като ρ е ограничено, освен това е ясно, че $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}} \subseteq \mathcal{F}_\rho$. Въвеждаме също сноповете $\mathcal{L}_\rho^k$, $\mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}$, $\mathcal{F}_\rho^k$ от k -кратно (не непременно непрекъснато) ρ -диференцируеми функции, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, както и сноповете $\mathcal{C}_\rho^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, от k -кратно *непрекъснато* ρ -диференцируеми функции върху $\mathcal{A}$. Отбелязваме, че налагането на непрекъснатост на производната премахва разграничението между $\mathcal{L}_\rho$, $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ и $\mathcal{F}_\rho$ -регулярност (вж. [Лема 1.1.11](#)), откъдето идва унифицираното означение в този случай. Въпреки това, в духа на предварително очертаните цели на дисертацията, съществена част от нея е посветена на точната връзка между тези класове на ρ -диференцируемост с по-ниска регулярност, техните свойства, както и взаимодействието им с основни алгебрични конструкции в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ и $\text{FdMod}(\mathcal{A})$. Мотивацията за внимателно изучаване на класовете с ниска ρ -диференцируемост е съвсем естествена: стандартен, но нетривиален факт в комплексния анализ е, че непрекъснатостта на производната на холоморфни функции е излишно предположение. Това повдига неизбежния въпрос докъде може да ни отведе само $\mathcal{A}$ -еквивариантното условие без непременно да предполагаме подлежаща (почти) комплексна структура върху $\mathcal{A}$. Докато класът на регулярност $\mathcal{L}_\rho$ се държи добре спрямо почти всяка алгебрична конструкция (виж [Раздел 1.1](#)), отбелязваме, че той е неестествена дефиниция в Банаховата постановка, тъй като безкрайномерните комутативни банахови $\mathbb{K}$ -алгебри нямат непрематно плътни групи от обратими елементи. От друга страна, $\mathcal{F}_\rho$ е „златният стандарт“ в Банаховата постановка, но за съжаление по всичко изглежда, че няма добро поведение спрямо някои ключови алгебрични операции (най-вече предкомпозиционни факторизации спрямо епиморфизми, виж [Теорема 1.2.1](#)). Тук се намесва *спомогателното* понятие $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$, тъй като то е едновременно по-естествено за Банаховата постановка и се държи добре спрямо предкомпозиционни факторизации. Понеже няма пълно щастие, $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ за съжаление обаче по всичко изглежда, че няма добро поведение спрямо *посткомпозиционни* операции без допълнителни предположения (вж. например [Твърдение 1.1.16](#) и след това). Условието $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ всъщност не е странно; то възниква естествено в ρ -аналитичната постановка

$$f(Z + H) = f(Z) + \sum_{k=1}^{\infty} H^k \cdot \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} f(Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho(H)^k (f^{(k)}(Z))$$

по очевиден алгебричен начин, но при тази висока регулярност то съвпада и с $\mathcal{L}_\rho$ и $\mathcal{F}_\rho$. Доколкото ни е известно, [\[Wat92a\]](#) е единственото съдържателно третиране на въпроси за ниска $\mathcal{A}$ -регулярност, и то само за случая ${}_{\mathcal{A}}M = \mathcal{A}$, доказвайки $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, наред с още няколко неща, към които ще се върнем след малко. Идеята да се разглеждат представяния на $\mathcal{A}$ вместо самата $\mathcal{A}$ не е нова, не само в смисъла на теореми за реконструкции от категории на представяния, но и в нашата скромна аналитична постановка – в това отношение най-естественото обобщение би било да заменим $\mathcal{A}$ както в дефиниционната област, така и в кодефиниционна област, с ${}_{\mathcal{A}}M, {}_{\mathcal{A}}N \in \text{FdMod}(\mathcal{A})$ и после да изучаваме функции $f: U \rightarrow N$ за $U \subseteq M$ отворено с $\mathcal{A}$ -линеен диференциал, вместо само функции от типа $\mathcal{A} \rightarrow N$. Действително, тази постановка възниква естествено например при изучаването на крайномерни реални $\mathcal{A}$ -многообразия, виж например [\[Shu99\]](#), [\[SS01\]](#), [\[Mik01\]](#), [\[KM03\]](#), [\[Kur06\]](#) и по-късни статии на Mikulski, Kureš и други, но всички те приемат стандартната диференциално-геометрична $\mathcal{C}^\infty$ -постановка от самото начало и не се занимават с по-фини въпроси на регулярността, които така или иначе нямат отношение към диференциално-геометричното съдържание. В безкрайномерната постановка топологични (проективни, крайно породени) $\mathcal{A}$ -модули за топологични алгебри $\mathcal{A} \in \text{CAlg}_{\mathbb{K}}$ и $\mathcal{A}$ -диференцируеми¹⁴ изображения между тях също възникват естествено, например тръгвайки още от гореспоменатата работа на Кобаяши [\[Kob87\]](#) и Yagisita [\[Yag19a; Yag19b\]](#) (Банахови модули над $\mathcal{A} \in \text{CBanAlg}_{\mathbb{K}}$), както и в контекста на нелинейни теореми на Serre–Swan (вж. [\[Man92; Man95; Man98; Man17\]](#) и [\[Pap92a\]](#)) и $\mathcal{A}$ -векторни снопове (вж. [\[Pap92b; Pap94; Pap98; Pap99b; Pap99a\]](#), както и препратките там към статиите на Mallios). Добре известно е, че има тесни връзки между крайномерната диференциална геометрия и безкрайномерната. Това е **едно от двете** изследователски направления в групата (1)(ii) (диференцируемост относно безкрайномерни комутативни асоциативни $\mathbb{K}$ -алгебри), очертана в началото на въведението. Използваме случая да споменем и малко по-различната, но много интересна и изненадваща статия на [\[Ped97\]](#), която доказва *интегралната теорема* на Коши над *всички* *крайно* *породени* *комутативни асоциативни* $\mathbb{R}$ -алгебри, разбира се подходящо топологизирани. Заедно с цитираната работа на Manoharan и Papatriantafillou върху $\mathcal{A}$ -диференцируемост в топологични $\mathcal{A}$ -модули приемаме това като свидетелство за това, че понятието $\mathcal{A}$ -диференцируемост и $\mathcal{A}$ -холоморфност би трябвало да е възможно в много обща, подходящо топологизирана формална алгебрична постановка, вероятно дори „глобализирана“ до Ньотерови схеми над $\mathbb{K}$ вместо отделна Ньотерова $\mathbb{K}$ -алгебра. Но се отклоняваме! Освен всичко това „двустранната“ модулна постановка е естествена и по вътрешни причини: $\mathcal{A}$ -диференцируемостта включва (неканоничен) избор

¹⁴за подходяща дефиниция, зависеща от точния безкрайномерен контекст;

на $\mathcal{A}$ -структура върху $V \in \text{FdVec}_{\mathbb{K}}$, което е същото като инективно представяне на $\mathcal{A}$, каквито обикновено има много. Освен това този случай обхваща и няколко $\mathcal{A}$ -променливи като специален важен случай (свободни $\mathcal{A}$ -модули от краен ранг). Трябва да споменем в този момент, че „няколко $\mathcal{A}$ -променливи“ имат и друга посока на обобщение, а именно към функции на няколко различни $\mathcal{A}$ -променливи за вариращи алгебри $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ посредством *мултимодули*, тоест $\mathbb{K}$ -векторни пространства, които допускат няколко едновременни модулни структури (над различни алгебри), съвместими помежду си. Например $\mathcal{B} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ обикновено допуска много $\mathbb{K}$ -алгебрични морфизми към себе си (в частност за всички $\mathbb{K}$ -подалгебри, съдържащи се в $\mathcal{B}$). Макар някои от нашите предвидени приложения по-късно действително да изискват теория на функциите над по-обща $\mathcal{A}$ -модули, в настоящата работа ще се съсредоточим само върху специалния случай на $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции от вида $f: U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ за $U \subseteq \mathcal{A}$ отворено. Има няколко причини за това:

- преди всичко, те имат специалното свойство, че ρ -производната (когато съществува) отново е функция $f': U \rightarrow M$;
- на езика на поражащи елементи и релации, за да се разбере по-общият случай на $\mathcal{A}$ -модулна област на f , първо трябва да се разбере случаят на няколко *свободни* $\mathcal{A}$ -променливи; но за да се разбере добре този случай, първо трябва достатъчно добре да се разбере случаят на една $\mathcal{A}$ -променлива;
- този случай е сравним с векторнозначни холоморфни функции върху $\mathbb{C}$ и нищо не се губи като заменим $\mathcal{A}$ с ${}_{\mathcal{A}}M$ в кодефиниционната област, защото голяма част от теорията така или иначе е *адитивна*;
- задълбочено изследване на по-общия случай би изисквало да се включи значително повече теория на модулите в работа, която вече е доста дълга (т.е. по прозаични причини, свързани с дължината на текста);
- „скритата“ цел на настоящата дисертация всъщност е *диференцируемост относно морфизъм* $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, но тя се разглежда най-естествено на езика на модулите, тъй като голяма част от теорията е *адитивна*, както вече споменахме.

Както вече беше загатнато, дори в този специален случай ние вече *тайно* се занимаваме с функции над (мулти-)модули, защото ако $f: U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ има $\mathcal{A}$ -еквивариантен диференциал Df , тогава Df е еквивариантен и спрямо всички $\mathbb{K}$ -подалгебри на $\mathcal{A}$.

Специалният случай на морфизъм. Говорейки за морфизми $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, може и се дефинират съответните базови класове регулярност на φ -диференцируемост като просто се замени ρ с φ в горните дефиниции. Но тъй като голяма част от теорията е *адитивна*, по-удобно е случаят на представяне и случаят на морфизъм да се разглеждат на равно чрез преход към съответното представяне $\varphi^{\text{rep}} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\varphi}: \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{B}}} \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$, където $\rho_{\mathcal{B}}$ е регулярното представяне на $\mathcal{B}$. В някои случаи обаче всъщност е по-удобно представянето ρ да се разглежда като морфизъм ρ^{mor} в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ чрез преминаване към негова *удобна корестрикция*. Такъв е случаят в доказателството на [Твърдение 2.2.3](#), където ще искаме да идентифицираме решетката в $\text{End}_{\mathbb{K}}(M)$, в която приема стойности обобщеният аналитичен индекс (обобщеното число на навиване) $\text{Ind}_{\rho}(\Gamma, Z_0)$ на сингулярен 1-цикъл Γ спрямо точка $Z_0 \in \mathcal{A}$, в явна форма. Основните причини, поради които вграждането на морфизми $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в дефиницията на $\mathcal{A}$ -диференцируемост е желателно, са прости. Преди всичко, понятието диференцируемост е по своята същност относително (доказателство: гледане на дефиницията). Следователно не бива да изненадва, че при минимални допускания за регулярност такава диференцируемост има фулториално поведение: ако f е φ -диференцируема и g е ψ -диференцируема, тогава $g \circ f$ се оказва $\psi \circ \varphi$ -диференцируема (разбира се, при условие че композициите са добре дефинирани). Щом възможността за *теория на функции* над всяка $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ е установена – така заменияки предишния „каноничен“ избор на $\mathbb{C}$ – става пределно ясно, че категорно-теоретичният характер на предмета е неизбежен, както ще видим в [Раздел 1.1](#). Единственият оставащ въпрос тогава е колко далеч може да се доведе тази перспектива. Макар включването на φ в дефиницията на $\mathcal{A}$ -диференцируемост да е само козметична модификация, то е и концептуално важно, със собствени тънкости, и обхваща дори стандартни релевантни примери като антихоломорфни функции и $\mathcal{B}$ -значни холоморфни функции. Всъщност необходимостта от такава постановка е разпозната в [\[Shu99\]](#) в контекста на построяването на категория на всички гладки многообразия над алгебри на Вейл. Отбелязваме, че някои от нашите резултати за специалния случай $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ бяха анонсирани (без доказателства) в [\[Gen24\]](#). В дисертацията, разбира се, включваме пълни доказателства (в по-общия контекст на представяния). Припомняме също, че в алгебричната геометрия има добре установено относително понятие, по-специално на нивото на коефициентите/скаларите. Желанието е да въведем подобно относително понятие отвъд $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ и в комплексния анализ. В същия дух, рестрикция на Вейл е добре установена процедура/метод в алгебричната геометрия, особено в аритметичната геометрия, напр. алгебрични групи и Абелеви многообразия над разширение на числови полета L/K .

И действително, $\mathcal{A}$ -холоморфните функции могат да се интерпретират като холоморфно $\mathcal{A}$ -операторно смятане за холоморфни $\mathcal{A}M$ -значни функции; тогава преминаването към $\mathbb{C}$ -базис на $\mathcal{A}$ дава специален клас холоморфни изображения на няколко комплексни променливи.

Нека сега обърнем внимание на специалния случай $\varphi = \text{id}_{\mathcal{A}}$ и положим $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} := \mathcal{F}_{\text{id}_{\mathcal{A}}}$. Ако $\mathcal{A} \in \text{CBanAlg}_{\mathbb{C}}$, дефиницията $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ всъщност е въведена още от [Lor43], където Lorch доказва интегралната теорема на Коши, интегралната формула на Коши и аналитичност при предположение за изпъкналост на съответната област¹⁵. Около 12 години по-късно Blum [Blu55] премахва предположението за изпъкналост на Lorch и съществено разширява основната теория. Оттогава насам областта на холоморфност над общи безкрайномерни комутативни Банахови $\mathbb{C}$ -алгебри се развива с бавно, но равномерно темпо (вж. например [Mib60] и [Gli68; Gli70; Gli71]) и е активна област на изследване и до ден днешен, вж. [MMP09; MP13; MMP16; MP16]. Както читателят може би се е досетил вече, това е втората посока на изследване в групата (1)(ii), въведена в началото. Отбелязваме, че макар комутативната Банахова постановка доста обща и включва крайномерния случай, последният също има много специална допълнителна структура (започвайки с разлагането на комутативни артинови алгебри в локални), която не е непременно налична в общността на Банаховата постановка, и разполага с езика и инструментите на стандартната диференциална геометрия и алгебрична топология.

Структура на настоящата дисертация и нови резултати. Следвайки очертаната философия за идентифициране на правилните причини зад всеки *структурен* резултат, бързо се вижда при внимателен преглед на съществуващата литература, че е необходим по-задълбочен поглед към *реалната* теория, по-точно над неопределеното $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Следователно, макар главната цел на настоящата дисертация да е крайномерната комутативна *комплексна* теория, се налага да отделим малко повече време и на подлежащата *реална* теория отколкото първоначално възнамерявахме. В следствие на това настоящата дисертация органично се разделя на следните две глави / полета от коефициенти / групи от аргументи:

- (1) „Диференциране над $\mathcal{A}$ “ (Глава 1) обхваща теорията над $\mathbb{K}$, т.е. частта независима от наличието на подлежаща комплексна структура на $\mathcal{A}$, или еквивалентно, основни резултати, които следват по чисто *алгебрични причини*, и по-точно: при дадена $\mathcal{A}$ -диференцируема $f: U \rightarrow \mathcal{A}$, *комутативността* на $\mathcal{A}$ е точната причина за това съответната $\mathcal{A}M$ -значна диференциална 1-форма $\omega := dZ \cdot f(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(dZ)(f(Z))$ да е d-затворена, т.е. $d\omega = 0$, което води до обобщената *интегрална теорема* на Коши над $\mathcal{A}$. В частност, *интегралната теорема на Коши* (дори над $\mathbb{C}$) няма нищо общо с комплексните числа сами по себе си (освен исторически), а само с тяхната структура на комутативна $\mathbb{R}$ -алгебра.
- (2) „Интегриране над $\mathcal{A}$ “ (Глава 2) обхваща теорията над $\mathbb{C}$, или еквивалентно, основни резултати, които следват по чисто *топологични причини*, и по-точно: $\pi_0(\mathbb{C}^{\times}) = 1$ е точната причина за $\pi_0(\mathcal{A}^{\times}) = 1$, което на свой ред позволява съществуването на (холоморфното) обобщено възпроизвеждащо ядро на Коши над $\mathcal{A}$, водейки до обобщен аналитичен индекс (число на навиване) над $\mathcal{A}$, до *интегрална(u) формула(u)* на Коши над $\mathcal{A}$ и др. Това е първата най-съществена разлика спрямо *чисто* реалната теория, от която и следват всички очаквани специални $\mathcal{A}$ -аналози на комплексната равнина.

В повече детайли, първият фундаментален въпрос, с който се занимаваме в Раздел 1.1, е доказателството на факта, че $\mathcal{L}_{\rho} \subseteq \mathcal{F}_{\rho}^{\text{str}} \subseteq \mathcal{F}_{\rho}$. За $\mathcal{A}M = \mathcal{A}$ Waterhouse показва в [Wat92a], че $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, но дори в този случай нашите подходи се различават съществено. Неговата стратегия на доказателство е следната: за дадена $\mathcal{A} = \prod_{k=1}^n (\mathcal{A}_k, \mathfrak{m}_k, \mathbb{R})$ първо се показва, че всяка $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(U)$ може да се запише като $f(Z) = f(Z_1, \dots, Z_n) = (f_1(Z_1), \dots, f_n(Z_n))$, където всяка $f_k(Z_k)$ е $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_k}$ -диференцируема (това е специален случай на нашето по-късно Теорема 1.2.2) и след това се използва доста специфичната *алгебрична структура* на локалната $(\mathcal{A}_k, \mathfrak{m}_k, \mathbb{R})$, за да се заключи, че всъщност f_k е $\mathcal{F}_{\mathcal{A}_k}$ -диференцируема, следователно по-специално непрекъсната, $1 \leq k \leq n$, откъдето следва и твърдението за самото f . За сравнение нашият подход напълно избягва позоваването на каквито и да било алгебрични факти за $\mathcal{A}$ и показва, че разглежданото включване важи по *чисто топологични/аналитични* причини (както и би трябвало!). Всъщност ние показваме непрекъснатостта на $f \in \mathcal{L}_{\rho}(U)$ (отново по чисто топологични причини) преди да покажем, че тя е Фреше $\mathcal{A}$ -диференцируема (отново както и би следвало!). Освен това Waterhouse не е особено прецизен относно областите на дефиниция на компонентите f_k , $1 \leq k \leq n$. Най-накрая, не сме напълно убедени и от неговото доказателство на самото разлагане на f , тъй като той всъщност го показва само за произведения на копия на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, използвайки съществено техните абсолютни нормирания, а след това отбелязва, че доказателството за общия случай $\mathcal{A} = \prod_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ е аналогично; но да си припомним, че в общия случай $\mathcal{A}_k$, $1 \leq k \leq n$, допускат само *субмултиплика-*

¹⁵изкушаващо е да наречем $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ -регулярните функции за $\mathcal{A} \in \text{CBanAlg}_{\mathbb{C}}$ *лорхоломорфни*;

тивни норми, чието неравенство според нас е в обратна посока на нужното в неговия аргумент. Но дори аргументът му да може да бъде спасен, не считаме, че е пълен. Останалата част от [Раздел 1.1](#) е предимно посветена на проверка на различни правила на “ ρ -смятане”, вкл. различни верижни правила. По-специално, в [Твърдение 1.1.14](#) формулираме “смесено” правило на Лайбниц за производението на функция диференцируема спрямо морфизъм с такава диференцируема спрямо представяне. Що се отнася до верижните правила, важна тънкость е, че без допълнителни условия междинният сноп $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ не се държи добре спрямо посткомпозиции. Това включва дори посткомпозиции с $\mathcal{A}$ -линейни хомоморфизми, което прави $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ донякъде странно в сравнение с другите два класа регулярност (вж. [Твърдение 1.1.16](#)). Доказваме също съществено усилване на главен резултат от [\[GM96\]](#) в [Твърдение 1.1.13](#): в нашите означения техният резултат гласи $\mathcal{C}_\mathcal{A}^\omega(U, \mathcal{A}\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\mathcal{A}^\infty(U, \mathcal{A}\mathcal{A}) \cap \mathcal{C}^\omega(U, \mathcal{A})$, докато ние показваме, че всъщност $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}: \mathcal{C}_\mathcal{A}^k(U, \mathcal{A}\mathcal{A}) = \mathcal{L}_\mathcal{A}(U, \mathcal{A}\mathcal{A}) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{A})$, тоест може да се премахне условието за “ $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ -гладкост” и да се остави само най-базовата $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ -регулярност (същинската причина е *чисто алгебрична*, а именно, че $\mathcal{A}$ -линейността се пренася към всички по-високи тотални производни поради тяхната симетрия).

В [Раздел 1.2](#) доказваме различни автоматични ρ -диференцируеми продължения на ρ -диференцируеми функции и канонични факторизации, като изучаваме взаимодействието между анализа и базови алгебрични/категорно-теоретични конструкции, най-вече епиморфизми. Отбелязваме, че каноничните факторизации и автоматичните ρ -диференцируеми продължения са всъщност две страни на един и същи медал. Тук $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ най-после получава възможност да блесне, след като беше разочарование в [Раздел 1.1](#). Като изключим $\mathcal{A}$ -пролонгацията и гореспоменатия резултат за факторизация от [\[Wat92a\]](#), всички тези резултати за факторизация/продължение са изцяло нови, доколкото ни е известно. Естествено всички те разчитат на запазването на $\mathcal{A}$ -диференцируемостта от пред- и посткомпозиции установено в [Раздел 1.1](#). Тук също различни **спектрални съображения** влизат в играта за първи път и ще са с нас до края. По-точно, при дадено крайномерно представяне $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M)$, където $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{m}_j, \mathbb{K}_j)$, имаме, че $\mathcal{A}M$ допуска неразложимо разлагане $\mathcal{A}M = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{A}M_k$ и ρ определя индексно подмножество $I_\rho \subseteq [n]$ от “релевантни” локални фактори $\mathcal{A}_j$, или еквивалентно от характеристики χ_j на $\mathcal{A}$, $j \in I_\rho$, по такъв начин, че ρ се свежда до представянето $(\mathcal{A}_j, \mathfrak{m}_j, \mathbb{K}_j) \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M_k)$ в определен тесен смисъл (вж. [Лема 0.0.6](#) за точните детайли). С други думи, от страна на представянията е напълно достатъчно да се разглеждат само *неразложими представяния на локални Артинови $\mathbb{K}$ -алгебри*. Оказва се, че тази история продължава и в аналитичната страна (вж. [Теорема 1.2.3](#)) и че за целите на анализа всъщност е достатъчно да се разглеждат само *инективни* неразложими представяния на локални Артинови $\mathbb{K}$ -алгебри.

В [Раздел 1.3](#) формулираме хомогенните обобщени уравнения на Коши–Риман(–Шеферс) за ρ -диференцируеми функции и обсъждаме различни техни козметични аспекти. Те са добре известни. След това *извеждаме* обобщени оператори на Wirtinger, *универсални* за всички $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_\mathbb{K}$. За наша изненада те са напълно нови, въпреки че конструкцията е изцяло естествена. Тънък момент е, че докато обобщените уравнения на Коши–Риман–Шеферс очевидно зависят от $\mathcal{A}$ -модула M (за разлика от векторнозначните холоморфни функции, които всички удовлетворяват едни и същи уравнения на Коши–Риман), по-точно от структурния тензор на представянето ρ , обобщените оператори на Wirtinger се формулират изцяло на вътрешния език на $\mathcal{A}$ (разбира се, човек все пак трябва да знае действието $\mathcal{A} \curvearrowright M$), вж. [Дефиниция 1.3.2](#). Те имат и естествени интерпретации като “компонентите” на 2-формата $d(dZ \cdot f(Z))$.

Като заговорихме за нея, в [Раздел 1.4](#) най-после разглеждаме $\omega := dZ \cdot f(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(dZ)(f(Z)) \in \Omega^1(U, \mathcal{A}M)$ и формулираме ключовия факт, че $f(Z)$ е ρ -диференцируема тогава и само тогава, когато $d\omega = 0$, вж. [Твърдение 1.4.3](#). В случая $\mathcal{A}M = \mathcal{A}$ този резултат не е нов, но доколкото ни е известно, неговото доказателство в тезата е ново, по всяка вероятност защото използва обобщените оператори на Wirtinger. Там разглеждаме и обратния въпрос за ρ -интегрируемост, т.е. съществуване на ρ -примитивни на ρ -диференцируеми функции $f(Z)$ върху различни области, и доказваме, че това е така върху *хомологично 1-свързани* области. Разбира се, по пътя до там доказваме различни версии на обобщената интегрална теорема на Коши, по-специално обобщена теорема на Коши–Гурса, която премахва условието за непрекъснатост на производната, вж. [Твърдение 1.4.4](#). Доколкото ни е известно, тази адаптация на доказателството на е нова в „крайномерната комутативна“ литература, особено за модули, но се появява в безкрайномерния комутативен случай при [\[Ped97\]](#). Във всеки случай тя е естествено продължение на предходното обсъждане на ниска регулярност на ρ -диференцируемостта.

В [Раздел 2.1](#) най-после започваме разглеждането на *комплексния* случай. Тук **спектралните съображения** вече играят наистина *решаваща* роля. Уместно е в този момент да се посочи, че когато става

дума за комплексния случай има две привидно конкуриращи се гледни точки. Първата е, така да се каже, *вътрешната*, отразяваща желанието да се покаже, че $\mathcal{A}$ -холоморфността е напълно самостоятелна и самодостатъчна теория, която е извоювала правото си на самостоятелно съществуване и стои наравно с класическия комплексен анализ. Това, разбира се, е философски и концептуално важно, но е осъществимо само до определена степен. Втората перспектива е именно **спектралната**, свеждаща различни проблеми до комплексната равнина, понякога съвсем буквално. Но **спектралният подход** е повече от просто ефективен начин за опростяване на проблеми – без нея теорията на $\mathcal{A}$ -диференцируемостта и $\mathcal{A}$ -холоморфността просто остава непълна. Така **Раздел 2.1** въвежда всички необходими топологични и алгебро-топологични понятия, които по-късно ще подпомагат интеграционната теория на възпроизвеждащото ядро на Коши (и свързани въпроси) в *нейните най-силни топологични форми*, и всички те са тясно свързани със *спектралните понятия*, въведени в **Глава 0**. Казваме „най-силна топологична форма“, защото **спектралната гледна точка** ясно показва многократно за различни (но не всички!) типове проблеми, че единствена обструкция е това, което е (не)известно и/или осъществимо в комплексната равнина. Това важи с пълна сила и за **Раздел 2.2**, **Раздел 2.3** и **Раздел 2.4**. Много накратко, както вече споменахме, крайномерното представяне $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ определя подмножество от характери $\chi_j \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$ на $\mathcal{A}$, $j \in I_\rho$, които сглобяват „мулти-характер“ $\chi := \chi_\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^{I_\rho}$, давайки „релевантния“ строг деформационен ретракт за хомотопично „свеждане“ на съответните интеграли до комплексната равнина (по-точно, до нейна Декартова степен в общия случай). Доколкото ни е известно, **спектралният подход**, както в реалната, така и в комплексната крайномерна комутативна теория, е напълно нов елемент, за което свидетелстват значително по-силните резултати, които получаваме, в сравнение с наличните в съответната литература. По-специално, това включва и простите алгебро-топологични инварианти, въведени в края на **Раздел 2.1**, които управляват базовата алгебрична топология на $\mathcal{A}$ -холоморфността. От друга страна, разбира се, спектралните аргументи не са нищо ново за безкрайномерните Банахови алгебри.

В **Раздел 2.2** въвеждаме ρ -аналога на аналитичния индекс (числото на навиване) от равнината за сингулярни 1-цикли Γ спрямо точка $Z_0 \in \mathcal{A}$ и даваме пълна негова характеристикация, използвайки гореспомнатия спектрално-хомотопичен подход, като показваме, наред с други неща, че той приема стойности в канонична решетка в $\text{End}_{\mathbb{C}}(M)$. Отбелязваме, че в специалния случай $\varphi = \text{id}_{\mathcal{A}}$ с $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ обобщеният индекс се появява като неопределено цяло число в [Riz52a; Riz52b]. Той се появява и в [Ede76b] и [Shp15], но никой от авторите не успява да даде задоволително негово описание или пълно изчисление освен в някакви частни случаи.

В **Раздел 2.3** доказваме няколко версии на интегралната формула на Коши над $\mathcal{A}$, започвайки от локална „точкова“ формулировка, преминавайки през хомотопична „точкова“ и локална формулировки, стигайки до хомологичната версия, която е и най-общата. С изключение на последната, всички останали формулировки са *вътрешни*. Тази своеобразна градация на *вътрешни* версии е свързана с факта, че особеностите на възпроизвеждащото ядро на Коши са донякъде по-комплексни от тази в комплексната равнина, което превръща проблематиката в балансиращ акт между контурите на интегриране, точките на „възпроизвеждане“ и дефиниционната област на ρ -холоморфната функция $f(Z)$. Отбелязваме, че хомологична версия на интегралната формула на Коши над $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ се появява и в гореспомнатите статии на G.B. Rizza [Riz52a; Riz52b], но нашата топологична хипотеза за интегрирания 1-цикъл Γ е много по-слаба от неговата (и следователно нашето твърдение е много по-силно): докато Rizza изисква Γ да бъде нулхомологичен, ние изискваме Γ да бъде само спектрално нулхомологичен (вж. **Дефиниция 2.1.5**), т.е. само определени спектрални проекции (по-точно, образите под χ_j , $j \in I_\rho$) на Γ да бъдат нулхомологични. Страничен продукт на нашето *спектрално* доказателство е, че тази версия в известен смисъл е най-силната възможна, тъй като твърдението се свежда до хомологичната интегрална формула на Коши в комплексната равнина. Отбелязваме, че самостоятелно изложение на нашето доказателство за локалния случай без допълнителния товар на представяния и модули е дадено в статията ни [Gen26]. По-нататък, доказваме също така автоматично ρ -холоморфно продължение на ρ -холоморфни функции и даваме пълна характеристикация на областите на ρ -холоморфност (**Теорема 2.3.4** в комбинация със **Следствие 2.3.6**). След това извеждаме и $\mathcal{A}$ -аналозите на различни стандартни следствия на интегралната формула на Коши. Накрая доказваме преобразуване на Коши над $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ (вж. **Твърдение 2.3.8**), от което извеждаме второ, но *вътрешно* доказателство на ρ -аналитичността на ρ -холоморфните функции (първото е **Твърдение 1.1.13**), както и $\mathcal{A}$ -аналога на теоремата на Морера (**Твърдение 2.3.10**) за модули. Макар теоремата на Морера над $\mathcal{A}$ със сигурност да присъства в литературата (с изключение на факта, че нашата версия е за ρ -холоморфни функции, а не за $\mathcal{A}$ -холоморфни), преобразуването на Коши над $\mathcal{A}$ е изцяло нов резултат, доколкото ни е известно.

Накрая в **Раздел 2.4** доказваме формула на Коши–Помпею над $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ за достатъчно диферен-

цируеми $\mathcal{A}$ -значни изображения f и ориентируеми компактни повърхнини $\Sigma \subset \mathcal{A}$ в общо положение спрямо $\mathfrak{m}$. Това има приложения към „стандартната“ теория на *холоморфните изображения* на няколко комплексни променливи по следния начин: тъй като $\mathcal{A}$ -холоморфните функции са в частност холоморфни, това резултира за *холоморфни изображения* f във един вид нискоразмерна версия на формулата на Бохнер–Мартинели за f над Σ , но с ненулев повърхнинен интеграл и *холоморфни ядра* както за граничния, така и за повърхнинния интеграл. Отбелязваме, че в крайномерния комутативен *реален* случай обобщение на формулата на Коши–Помпеу е дадено и от [Sny90], но при наличието на подлежаща комплексна структура неговите интегрални ядра не са холоморфни поради присъствието на норми в тях.

Алгебричният класификационен проблем. Отбелязваме, че за $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} \geq 7$ има неизброимо много изоморфизми типове на $(\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{K}) \in \text{LocArt}_{\mathbb{K}}$ (вж. [ST03; ST68] или [Sup56]). Пълна класификация до размерност $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} \leq 6$ е дадена от Roopen в [Poo08b]. Намирането на класификация/параметризация в явна форма на всички такива алгебри е важен отворен проблем (вж. [Poo08a] за какво се знае актуално за структурата на подлежащото параметрично пространство). Освен това е известно, че теорията на представянията на $(\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{K})$ с $\mathfrak{m}^2 \neq 0$, но дори $\mathfrak{m}^3 = 0$, е дива.

Пропуснати теми. Сигурно е, че важните теми, които сме пропуснали в настоящата работа, са поне толкова много, колкото и включените. По-точно, не сме включили следното:

- някаква по-дълбока теория на представянията/модулите на $\mathcal{A}$, както и каквато и да било по-фина структурна теория за самата $\mathcal{A}$ (еквивалентно, „дълбок поглед в радикала“);
- ρ -диференцируемост в смисъла на Gateaux;
- цяла глава върху ρ -аналитичността и свойствата на изображенията на ρ -аналитичните функции за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$;
- каквато и да било мероморфна теория и особености над $\mathcal{A}$. Това всъщност е свързано с появата на нов феномен на особености на съответните Лоранови редове (в сравнение с комплексната равнина) поради наличието на нилпотентни елементи. Наричаме този нов вид особености „съществени полюси“ по следните очевидни причини. Това най-лесно се илюстрира с пример: още за $\mathbb{C}[\epsilon]((Z))$, $\epsilon^2 = 0$ имаме

$$\left(\frac{\epsilon}{Z} - i\right)\left(\frac{\epsilon}{Z} + i\right) = 1,$$

което разбира се става доста по-сложно при по-високоразмерни $\mathcal{A}$. Интересен проблем е да се характеризира кога се появяват такива особености, но това е далеч извън обхвата на настоящата работа. С други думи, има и съществени качествени разлики спрямо комплексната равнина, които не могат да бъдат уловени от спектрални аргументи!

- решаване на *нехомогенните* уравнения на Коши–Риман–Шеферс и съответния аналог на $\bar{\partial}$ -проблем на Нойман над $\mathcal{A}$;
- продължавайки предходната точка, не разглеждаме и релевантни кохомологични теории. Все пак препращаме читателя към [Mal90; Mal99; Mal08], [Shu96], [SS01] и [MS16] за случая $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{R}}$. При подлежаща $\mathbb{C}$ -структура съответните кохомологични теории вероятно растат като $O(n^2)$.

Както и още други неща, които иначе органично биха принадлежали към настоящата дисертация.

Приложения. Дори ако пренебрегнем Раздел 2.4 или естествената поява на $\mathcal{A}$ -структури в геометрията, теорията на $\mathcal{A}$ -диференцируемите функции за $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ със сигурност не е самоцелна. Има солидна историческа традиция на приложения към диференциални (и интегрални) уравнения: например [Ket28b], [Lam49], [Wag48], [War53], [Eic61], [Ede76a], [Wat92b], [PRS13], [L6p22], [LMT23], [AFL23], [DLO25] и много други. Дори още повече, ако включим и некомутативната постановка (вж. например [BKK03; Kra07; Kra09; Kra13; BK14; KM14; KT18] и много други) в разглежданията.

Бележка относно терминологията. В различни теории на функции над $\mathcal{A} \in \text{Alg}_{\mathbb{K}}$ функциите обекти на тези теории често се наричат *моногенни*, което означава, че съответното понятие за производна е независимо от избора на посока, и иначе *полигенни*. Крайните пръстенни разширения на $\mathbb{R}$, комутативни или не, исторически често са били обобщено наричани *хиперкомплексни числа* (откъдето идват и понятия като *хиперкомплексен анализ*, *хиперкомплексна променлива*, *хиперхоломорфни функции* и т.н.), но не всеки автор разбира едно и също под този терминология. Например, малко е странно да се нарича *хиперкомплексно* крайно пръстенно разширение на $\mathbb{R}$, което дори не е ляво или дясно $\mathbb{C}$ -векторно пространство. Бикомплексните числа $\mathbb{C}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ понякога се наричат и *моторни променливи* (motor variables) (предимно само от някои физици). „Биреалните“ числа $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ имат много имена: *двойни числа* (double numbers), *хиперболични числа* (hyperbolic numbers), *разцепени комплексни числа* (split-complex numbers), *паракомплексни числа* (paracomplex numbers) (и отток

например идват понятията *паракомплексна геометрия* и *парахоломорфни функции* и др.). Някои автори наричат $\mathcal{A}$ -диференцируемите функции *холоморфни*, независимо от това дали $\mathcal{A}$ има подлежаща комплексна структура или не, вероятно защото те удовлетворяват обобщени уравнения на Коши–Риман (вж. например [Sal23]).

0. Предварителни сведения и дефиниции

Нека $\{\mathcal{A}_j\}_{1 \leq j \leq n} \subset \text{Alg}_R$ и $\mathcal{A} := \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$. Имаме естествени епиморфизми:

$$\begin{aligned} \text{pr}_j &:= \text{pr}_j^{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_j \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto a_j, \end{aligned}$$

за всички $1 \leq j \leq n$.

Дефиниция 0.0.1: Нека $\emptyset \neq I \subseteq [n]$ и $X \subseteq \mathcal{A}$. Дефинираме:

- (1) $\mathcal{A}_I := \prod_{j \in I} \mathcal{A}_j$.
- (2) $X_j := \text{pr}_j(X) := \text{pr}_j^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \mathcal{A}_j$, $1 \leq j \leq n$.
- (3) $X_I := \prod_{j \in I} X_j$ и

$$X_{(I)} := \begin{cases} X_j, & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Освен това за всяко $\emptyset \neq I \subseteq [n]$ имаме очевидни „мулти-проекции“-морфизми:

$$\text{pr}_I := \text{pr}_I^{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_I.$$

В другата посока дефинираме също така:

Дефиниция 0.0.2:

- (1) Канонични неунитални включвания на R -алгебри: $\forall 1 \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &:= \varepsilon_j^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}_j \hookrightarrow \mathcal{A} \\ a_j &\mapsto (0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

- (2) Мулти-включвания: ако $\emptyset \neq I \subseteq [n]$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &:= \varepsilon_I^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}_I \hookrightarrow \mathcal{A} \\ (a_j)_{j \in I} &\mapsto (a_1, \dots, a_n), \end{aligned}$$

където $a_j = 0$ за всяко $j \notin I$.

Лема-дефиниция 0.0.3 (Външни директни произведения и категорията на всички модули):

- (1) Съвместимост на морфизми: дадени $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в Alg_R^* и ${}_R M \xrightarrow{\Phi} {}_R N$ in $\text{Mod}(R)$, двойката (φ, Φ) се нарича съвместима, ако $M \in \text{LMod}(\mathcal{A})$, $N \in \text{LMod}(\mathcal{B})$, и

$$\forall A \in \mathcal{A}: \varphi(A) \circ \Phi = \Phi \circ A \quad (0.0.1)$$

С други думи $\Phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}M, \varphi^*(\mathcal{B}N))$.

- (2) Категорията $\text{LMod}(\text{Alg}_R^*)$ на **всички** леви модули над неунитални R -алгебри е зададена чрез:

(i) Обекти:

$$\text{Obj}(\text{LMod}(\text{Alg}_R^*)) := \{\mathcal{A}M := (\mathcal{A}, M) : \mathcal{A} \in \text{Alg}_R^*, M \in \text{LMod}(\mathcal{A})\}$$

(ii) Морфизми:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(M, N) := \text{Mor}(\mathcal{A}, M; \mathcal{B}, N) :=$$

$$:= \text{Mor}((\mathcal{A}, \mathcal{A}M), (\mathcal{B}, \mathcal{B}N)) := \{(\varphi, \Phi) : M \xrightarrow{\Phi} N \text{ е съвместима с } \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}\}.$$

- (3) Външни директни произведения: ако $\{\mathcal{A}_i M_i\}_{i \in I} \subset \text{LMod}(\text{Alg}_R^*)$, външното директно произведение $\times_{i \in I} (\mathcal{A}_i M_i)$ е дадено чрез $\prod_{i \in I} M_i$ заедно с $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \curvearrowright \prod_{i \in I} M_i$, $(a_i)_{i \in I} \cdot (x_i)_{i \in I} := (a_i \cdot x_i)_{i \in I}$.

Дефиниция 0.0.4 (Проекционна селекция): Нека $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ in Alg_R , $m \in \mathbb{N}$, и нека $\tau: [m] \rightarrow [n]$, $k \mapsto \tau(k)$, е параметризация на индекса. Дефинираме

$$\Pi := \Pi_{(\tau)} := (\text{pr}_{\tau(1)}, \dots, \text{pr}_{\tau(m)}),$$

т.е.

$$\begin{aligned} \Pi_{(\tau)}: \mathcal{A} &\rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{\tau(k)} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(m)}). \end{aligned}$$

Лема-дефиниция 0.0.5 (Стандартна форма на $\Pi_{(\tau)}$): Нека $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$, $m \in \mathbb{N}$, и $\tau: [m] \rightarrow [n]$ са като горе. Тогава до някаква пермутация $\pi \in \mathfrak{S}_m$ изображението $\Pi_{(\tau)}$ може да се напише като

$$\Pi_{(\tau)}: \mathcal{A} \xrightarrow{\text{pr}_I} \mathcal{A}_I \xrightarrow{\Delta_I} \prod_{j \in I} \mathcal{A}_j^{m_j}, \quad (0.0.2)$$

което ще наричаме *стандартна форма* на $\Pi_{(\tau)}$, където:

- $I := I_{(\tau)} := \tau([m]) \subseteq [n]$;
- $m_j := |\tau^{-1}(j)| \geq 1$, $j \in I$, и $\sum_{j \in I} m_j = m$ е $\mathbb{N}$ -разбивка на m от размер $|I|$;
- $\Delta_I := \times_{j \in I} \Delta_j$ за $\Delta_j: \mathcal{A}_j \hookrightarrow \mathcal{A}_j^{m_j}$, $a_j \mapsto (a_j, \dots, a_j)$, $j \in I$, са очевидните диагонални морфизми.

Освен това изборът на π е еднозначен до пост-композиция с пермутация от $\prod_{j \in I} \mathfrak{S}_j \leq \mathfrak{S}_m$. Ако $\Pi_{(\tau)}$ е в *стандартна форма*, тогава индексното изображение $\tau: [m] \rightarrow [n]$ ще се нарича *групирано по нишки*.

Означение: Когато няма опасност за двузначност просто ще пишем за удобство $j: [m] \rightarrow [n]$ и $j(k) := \tau(k)$ вместо τ .

Лема 0.0.6 (Стандартна факторизация на крайно разложими представяния на крайни произведения от алгебри): Нека $\mathcal{A} \in \text{Alg}_R$ и $M \in \text{LMod}(\mathcal{A})$ чрез $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M)$. Ако $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ в Alg_R и M е крайно разложимо в $\text{LMod}(\mathcal{A})$, тогава съществува пълно разлагане $M = \bigoplus_{k=1}^m M_k$ в $\text{LMod}(\mathcal{A})$ и групиращо по нишки индексно изображение $\tau := \tau_\lambda: [m] \rightarrow [n]$, $k \mapsto \tau(k)$, зависещо от това разлагане и от λ , такова че λ може да се напише като

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\lambda^{\text{cor}}} & \prod_{k=1}^m \text{End}_R(M_k) \xrightarrow{\iota^{\text{cor}}} \text{End}_R(M) \\ \Pi_\lambda \downarrow & \nearrow \exists_1 \bar{\lambda}^{\text{cor}} & \\ \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{\tau(k)} & & \end{array} \quad (0.0.3)$$

където:

- ι^{cor} а каноничното включване на съответните *вглови* алгебри;
- $\Pi_\lambda := \Pi_{(\tau_\lambda)}$ е проекционна селекция в стандартна форма асоциирана с представянето λ ;
- $\bar{\lambda}^{\text{cor}} = \times_{k=1}^m \bar{\lambda}_k$ за някакви представяния $\bar{\lambda}_k: \mathcal{A}_{\tau(k)} \rightarrow \text{End}_R(M_k)$ такива, че $\lambda_k = \bar{\lambda}_k \circ \text{pr}_{\tau(k)}^{\mathcal{A}}$, $1 \leq k \leq m$, където $\lambda^{\text{cor}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Дефиниция 0.0.7 (Индукцирано индексирало подмножество): Нека $\mathcal{A} := \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ в Alg_R . Ако $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M)$ е представяне такова, че M е крайно разложимо в $\text{LMod}(\mathcal{A})$, тогава дефинираме

$$I_\lambda := I_{(\tau_\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_\lambda([m]) \subseteq [n].$$

Дефиниция 0.0.8 (Относителни затваряния, единици, радикали, класове): Нека $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ е морфизъм в Alg_R .

- (1) Затваряне¹ по отношение на φ : ако $X \subseteq \mathcal{A}$, полагаме

$$X^\varphi := \varphi^{-1}(\varphi(X)).$$

- (2) Мултипликативен подмоноид по отношение на φ :

$$\mathcal{A}_\varphi^\times := \text{U}_\varphi(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(\text{U}(\mathcal{B})) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(\mathcal{B}^\times) \supseteq \mathcal{A}^\times.$$

- (3) Сингулярен конус по отношение на φ :

$$\text{Sing}_\varphi(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_\varphi^\times = \varphi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{B})) \subseteq \text{Sing}(\mathcal{A}).$$

- (4) Радикал на Якобсон по отношение на φ :

$$\mathfrak{J}_\varphi(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{J}(\mathcal{B})).$$

- (5) Нилконус по отношение на φ :

$$\text{nil}_\varphi(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(\text{nil}(\mathcal{B})) \supseteq \text{nil}(\mathcal{A}).$$

Ако допълнително $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{CAlg}_R$, ще наричаме $\text{nil}_\varphi(\mathcal{A})$ нилрадикал по отношение на φ .

- (6) Сингулярен „клас“ на $a \in \mathcal{A}$ по отношение на φ :

$$[a]_{\text{sing}} := a + \text{Sing}(\mathcal{A})$$

и

$$[a]_\varphi := a + \text{Sing}_\varphi(\mathcal{A}) \subseteq [a]_{\text{sing}}.$$

¹още наречено φ -наситане на X ;

(7) Мултипликативен „клас“ на $a \in \mathcal{A}$ по отношение на φ :

$$[a]^\times := a + \mathcal{A}^\times$$

и

$$[a]_\varphi^\times := a + \mathcal{A}_\varphi^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \setminus [a]_\varphi \supseteq [a]^\times.$$

Дефиниция 0.0.9 (Индексно проекционно затваряне): Нека $\mathcal{A} := \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ in Alg_R , $I \subseteq [n]$, и $X \subseteq \mathcal{A}$. Тогава дефинираме:

$$\tilde{X} := \tilde{X}_{(I)} := \bigcap_{j \in I} \text{pr}_j^{-1}(X_j) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j \in I} X^{\text{pr}_j} = \text{pr}_I^{-1}(X_I) = \prod_{j=1}^n \begin{cases} X_j, & \text{if } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{otherwise} \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} X_{(I)}$$

Дефиниция 0.0.10 (Проекционно затваряне по отношение на представяне): За дадени $\mathcal{A} := \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ in Alg_R , представяне λ заедно със съответното $I_\lambda \subseteq [n]$ и $X \subseteq \mathcal{A}$ дефинираме

$$\tilde{X} := \tilde{X}_\lambda := \tilde{X}_{(I_\lambda)}.$$

Лема-дефиниция 0.0.11: Нека $\mathcal{A} := \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ в Alg_R и $I \subseteq [n]$.

(1) Мултипликативен подмоноид по отношение на I :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(I)}^\times &:= \text{U}_{(I)}(\mathcal{A}) := \text{U}_{\text{pr}_I}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_I^{-1} \left(\text{U} \left(\prod_{j \in I} \mathcal{A}_j \right) \right) = \text{pr}_I^{-1} \left(\prod_{j \in I} \text{U}(\mathcal{A}_j) \right) = \\ &= \prod_{j=1}^n \begin{cases} \mathcal{A}_j^\times, & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} = \widetilde{\mathcal{A}^\times} \supseteq \mathcal{A}^\times. \end{aligned}$$

(2) Сингулярен конус по отношение на I :

$$\text{Sing}_{(I)}(\mathcal{A}) := \text{Sing}_{\text{pr}_I}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_I^\times = \bigcup_{i \in I} \prod_{j=1}^n \begin{cases} \text{Sing}(\mathcal{A}_j), & \text{ако } j = i \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} \subseteq \text{Sing}(\mathcal{A}) \subseteq \widetilde{\text{Sing}(\mathcal{A})}.$$

(3) Нилконус по отношение на I :

$$\begin{aligned} \text{nil}_{(I)}(\mathcal{A}) &:= \text{nil}_{\text{pr}_I}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_I^{-1} \left(\text{nil} \left(\prod_{j \in I} \mathcal{A}_j \right) \right) = \text{pr}_I^{-1} \left(\prod_{j \in I} \text{nil}(\mathcal{A}_j) \right) = \\ &= \prod_{j=1}^n \begin{cases} \text{nil}(\mathcal{A}_j), & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} = \widetilde{\text{nil}(\mathcal{A})} \supseteq \text{nil}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

(4) Сингулярен „клас“ на $a \in \mathcal{A}$ по отношение на I :

$$[a]_{(I)} := a + \text{Sing}_{(I)}(\mathcal{A}) \subseteq [a]_{\text{sing}}.$$

(5) Мултипликативен „клас“ of $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}$ по отношение на I :

$$[a]_{(I)}^\times := a + \mathcal{A}_{(I)}^\times \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \begin{cases} a_j + \mathcal{A}_j^\times, & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} = \widetilde{[a]^\times} \supseteq [a]^\times.$$

Нека сега да фиксираме $R \in \text{CRing}$, $\mathcal{A} \in \text{CAlg}_R$, и да разгледаме $\text{Spm}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \triangleleft \mathcal{A} \text{ максимален}\}$. Нека $\mathcal{I} \subseteq \text{Spm}(\mathcal{A})$ е колекция от максимални идеали интерпретирана като *индексиращо подмножество*. Дефинираме $\kappa_j := \mathcal{A}/\mathfrak{M}_j$, $j \in \mathcal{I}$. Ще наричаме изображенията $\chi_j : \mathcal{A} \rightarrow \kappa_j$, $j \in \mathcal{I}$, (формални) характери на $\mathcal{A}$ и ще означаваме с $\mathcal{X}_{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) := \{\chi_j : j \in \mathcal{I}\}$ „пространството“ от (формални) характери на $\mathcal{A}$ по отношение на $\mathcal{I}$, където $\mathcal{X}(\mathcal{A}) := \mathcal{X}_{\text{Spm}(\mathcal{A})}(\mathcal{A})$. Имаме очевидно съответствие $\text{Spm}(\mathcal{A}) \leftrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{A})$. Следвайки **Дефиниция 0.0.1**, означаваме също така $\kappa_{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j \in \mathcal{I}} \kappa_j \in \text{CAlg}_R$. По-нататък, $\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq \text{Spm}(\mathcal{A})$ дефинира *мулти-характер* или *поли-характер*

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{I}} &:= \left(\times_{j \in \mathcal{I}} \chi_j \right) \circ \Delta_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \rightarrow \kappa_{\mathcal{I}} \\ a &\mapsto (\chi_j(a))_{j \in \mathcal{I}}. \end{aligned} \tag{0.0.4}$$

Дефиниция 0.0.12 (Спектрални затваряния и допълнения): Нека $\mathcal{A} \in \text{CAlg}_R$, $X \subseteq \mathcal{A}$ произволно и фиксираме $\mathcal{I} \neq \emptyset$.

- (1) Равномерно $\mathcal{I}$ -спектрално затваряне на X :

$$\widehat{X} := \widehat{X}_{\mathcal{I}} := X^{\chi_{\mathcal{I}}} = X + \text{Ker}(\chi_{\mathcal{I}}).$$

- (2) Равномерно $\mathcal{I}$ -спектрално допълнение на X :

$$\check{X} := \check{X}_{\mathcal{I}} := \chi_{\mathcal{I}}^{-1}(\chi_{\mathcal{I}}(X)^c) = \chi_{\mathcal{I}}^{-1}(\chi_{\mathcal{I}}(X))^c \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{X}^c = (X + \text{Ker}(\chi_{\mathcal{I}}))^c.$$

- (3) Спектрални проекции на X :

$$X_j^{\text{sp}} := \chi_j(X), j \in \mathcal{I}.$$

- (4) Пълна $\mathcal{I}$ -спектрална проекция на X :

$$X^{\text{sp}} := X_{\mathcal{I}}^{\text{sp}} := \prod_{j \in \mathcal{I}} X_j^{\text{sp}}$$

- (5) Индивидуални спектрални затваряния на X :

$$\widehat{X}_j := \chi_j^{-1}(X_j^{\text{sp}}) = X + \mathfrak{m}_j, j \in \mathcal{I}.$$

- (6) Поточково $\mathcal{I}$ -спектрално затваряне на X :

$$\widehat{X} := \widehat{X}_{\mathcal{I}} := \bigcap_{j \in \mathcal{I}} X^{\chi_j} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \chi_j^{-1}(X_j^{\text{sp}}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \widehat{X}_j = \bigcap_{j \in \mathcal{I}} (X + \mathfrak{m}_j) = \chi_{\mathcal{I}}^{-1}(X^{\text{sp}}).$$

- (7) Поточково $\mathcal{I}$ -спектрално допълнение на X :

$$\check{X} := \check{X}_{\mathcal{I}} := \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \chi_j^{-1}(\chi_j(X)^c) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \chi_j^{-1}((X_j^{\text{sp}})^c) = \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \chi_j^{-1}(X_j^{\text{sp}})^c \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \widehat{X}_j^c = \bigcap_{j \in \mathcal{I}} (X + \mathfrak{m}_j)^c.$$

Дефиниция 0.0.13: Нека $(\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \kappa) \in \text{LocArt}_{\kappa}$. Тогава въвеждаме и означенията:

$$\begin{array}{ccc} \kappa & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ & \searrow \text{id}_{\kappa} & \downarrow \chi_{\mathcal{A}} \\ & & \kappa \end{array}$$

Дефиниция 0.0.14: Нека $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{m}_j, \kappa_j) \in \text{Art}_K$ и $I \subseteq [n]$, където κ_j са коефициентни полета за $\mathcal{A}_j$, $1 \leq j \leq n$.

- (1) Спектрални неунитални включения:

$$\begin{aligned} \iota_j &:= \iota_j^{\mathcal{A}} := \varepsilon_j \circ \iota_{\mathcal{A}_j} : \kappa_j \hookrightarrow \mathcal{A}_j \hookrightarrow \mathcal{A} \\ z_j &\mapsto (0, \dots, 0, z_j, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

- (2) Спектрални неунитални мулти-включения:

$$\begin{aligned} \iota_I &:= \iota_I^{\mathcal{A}} := \varepsilon_I \circ (\times_{j \in I} \iota_{\mathcal{A}_j}) : \kappa_I \hookrightarrow \mathcal{A}_I \hookrightarrow \mathcal{A} \\ (z_j)_{j \in I} &\mapsto (z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

където $z_j = 0$ за $j \notin I$.

Лема-дефиниция 0.0.15: Нека $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{m}_j, \kappa_j) \in \text{Art}_K$ (където полетата от остатъци са коефициентни), $M \in \text{FgMod}(\mathcal{A})$ зададено чрез $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_K(M)$ и $X \subseteq \mathcal{A}$.

- (1) ρ -затваряне (ρ -насищане):

$$X^{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} X + \text{Ker}(\rho). \quad (0.0.5)$$

- (2) Проекционно затваряне по отношение на ρ :

$$\widetilde{X} := \widetilde{X}_{\rho} := \widetilde{X}_{(I_{\rho})} = \begin{cases} X_j, & \text{ако } j \in I_{\rho} \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (0.0.6)$$

- (3) Пространство от характери асоциирано с ρ :

$$\mathcal{X}_{\rho}(\mathcal{A}) := \mathcal{X}_{I_{\rho}}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\chi_j : j \in I_{\rho}\}. \quad (0.0.7)$$

- (4) Мулти-характер по отношение на ρ :

$$\begin{aligned} \chi_{\rho} &:= \chi_{I_{\rho}} : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \prod_{j \in I_{\rho}} \kappa_j \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_j \bmod \mathfrak{m}_j)_{j \in I_{\rho}}. \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

- (5) Равномерно спектрално затваряне на X по отношение на ρ :

$$\widehat{X} := \widehat{X}_\rho := \widehat{X}_{I_\rho} \stackrel{\text{def}}{=} X^{\chi_\rho}. \quad (0.0.9)$$

- (6) Равномерно спектрално допълнение на X по отношение на ρ :

$$\check{X} := \check{X}_\rho := \check{X}_{I_\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_\rho^{-1}(\chi_\rho(X)^c) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{X})^c. \quad (0.0.10)$$

- (7) Поточково спектрално затваряне на X по отношение на ρ :

$$\widehat{X} := \widehat{X}_\rho := \widehat{X}_{I_\rho} = \prod_{j=1}^n \begin{cases} X_j^{\text{sp}} \times \mathfrak{m}_j, & \text{ако } j \in I_\rho \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (0.0.11)$$

- (8) Поточково спектрално допълнение на X по отношение на ρ :

$$\check{X} := \check{X}_\rho := \check{X}_{I_\rho} = \prod_{j=1}^n \begin{cases} (X_j^{\text{sp}})^c \times \mathfrak{m}_j, & \text{if } j \in I_\rho \\ \mathcal{A}_j, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (0.0.12)$$

Лема-дефиниция 0.0.16: Нека $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{m}_j, \kappa_j) \in \mathbf{Art}_K$ (с коефициентни полета от остатъци), $M \in \mathbf{Mod}(\mathcal{A})$ зададено чрез $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{End}_R(M)$ крайно разложимо и $Z \in \mathcal{A}$.

- (1) Единици по отношение на ρ :

$$\mathcal{A}_\rho^\times = \mathcal{A}_{(I_\rho)}^\times \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \begin{cases} \mathcal{A}_j^\times, & \text{ако } j \in I_\rho \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \mathfrak{m}_j^c, & \text{ако } j \in I_\rho \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} = \bigcap_{j \in I_\rho} \mathfrak{M}_j^c. \quad (0.0.13)$$

- (2) Сингулярен конус по отношение на ρ :

$$\text{Sing}_\rho(\mathcal{A}) = \text{Sing}_{I_\rho}(\mathcal{A}) = \bigcup_{j \in I_\rho} \mathfrak{M}_j \quad (0.0.14)$$

- (3) Нилрадикал по отношение на ρ :

$$\text{nil}_\rho(\mathcal{A}) = \text{nil}_{(I_\rho)}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_\rho := \mathfrak{m}_{(I_\rho)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \begin{cases} \mathfrak{m}_j, & \text{ако } j \in I_\rho \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} = \mathfrak{J}_{(I_\rho)}(\mathcal{A}) \quad (0.0.15)$$

- (4) Сингулярен „клас“ на Z по отношение на ρ :

$$[Z]_\rho = [Z]_{(I_\rho)} \stackrel{\text{def}}{=} Z + \text{Sing}_{(I_\rho)}(\mathcal{A}). \quad (0.0.16)$$

- (5) Унитарен „клас“ на Z по отношение на ρ :

$$[Z]_\rho^\times = [Z]_{(I_\rho)}^\times = \prod_{j=1}^n \begin{cases} z_j + \mathcal{A}_j^\times, & \text{ако } j \in I_\rho \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (0.0.17)$$

където $z_j \stackrel{\text{def}}{=} \chi_j(Z) \in \kappa_j$, $1 \leq j \leq n$.

Твърдение 0.0.17: Нека $(\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \kappa) \in \mathbf{LocArt}_\kappa$. Имаме изоморфизъм на алгебрични групи:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^\times &\xrightarrow{\cong} \kappa^\times \times (\mathfrak{m}, +) \\ z \oplus X &\mapsto \left(z, \log \left(1 \oplus \frac{X}{z} \right) \right) \end{aligned} \quad (0.0.18)$$

с обратно изображение

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{A}}: \kappa^\times \times (\mathfrak{m}, +) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{A}^\times \\ (w, Y) &\mapsto w \exp(Y) = w \oplus (w(\exp(Y) - 1)). \end{aligned} \quad (0.0.19)$$

Твърдение 0.0.18: Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{FdCAlg}_{\mathbb{R}}$. Следните твърдения са еквивалентни:

- (i) $\pi_0(\mathcal{A}^\times) = 1$;
- (ii) $\mathcal{A}$ носи съвместима комплексна структура;
- (iii) $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ се състои от стриктно комплексни характери.

1. Диференциране над $\mathcal{A}$

1.1. Диференциране по отношение на представяне

Всяко $v \in M$ индуцира $\mathbb{K}$ -линейно изображение $\hat{v} := \text{ev}_v: \text{End}_{\mathbb{K}}(M) \rightarrow M$, $\Phi \mapsto \hat{v}(\Phi) := \Phi(v) = \Phi v$, и имаме естествено $\mathbb{K}$ -линейно включване

$$\begin{aligned} \Upsilon_M: M &\hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{End}_{\mathbb{K}}(M), M) \\ v &\mapsto (\hat{v}: \Phi \mapsto \Phi(v)), \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

което ще наричаме „регулярното представяне“ на модула M .

Дефиниция 1.1.1 (Класическа ρ/φ -диференцируемост): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

(1) Класическа ρ/φ -диференцируемост в точка: нека $Z_0 \in U$.

(i) Постановка на представяне: функция $f: U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ се нарича *класически ρ -диференцируема* в Z_0 , ако границата на следното *частно на нарастванията* съществува:

$$f'(Z_0) := \lim_{\substack{H \rightarrow 0 \\ H \in \mathcal{A}_{\rho}^{\times} \cap (U - Z_0)}} \rho(H)^{-1}(f(Z_0 + H) - f(Z_0)). \quad (1.1.2)$$

В този случай ще наричаме $f'(Z_0)$ ρ -производна на f в Z_0 .

(ii) Постановка на морфизъм: функция $f: U \rightarrow \mathcal{B}$ се нарича *класически φ -диференцируема* в Z_0 ако границата на следното *частно на нарастванията* съществува:

$$f'(Z_0) := \lim_{\substack{H \rightarrow 0 \\ H \in \mathcal{A}_{\varphi}^{\times} \cap (U - Z_0)}} \frac{f(Z_0 + H) - f(Z_0)}{\varphi(H)}. \quad (1.1.3)$$

В този случай ще наричаме $f'(Z_0)$ φ -производна на f в Z_0 .

(2) f се нарича *класически ρ/φ -диференцируема* ако е класически ρ/φ -диференцируема навсякъде в U .

(3) Пространства от класически ρ/φ -диференцируеми функции върху U :

$$\mathcal{L}_{\rho}(U) := \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(U, {}_{\mathcal{A}}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е класически } \rho\text{-диференцируема}\}$$

$$\mathcal{L}_{\varphi}(U) := \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(U, {}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow \mathcal{B} \mid f \text{ е класически } \varphi\text{-диференцируема}\}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(U) := \mathcal{L}_{\text{id}_{\mathcal{A}}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(U, \mathcal{A}).$$

(4) Пространства от k -кратно класически ρ/φ -диференцируеми функции: за $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ също полагаме

$$\mathcal{L}_{\rho}^k(U) := \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^k(U, {}_{\mathcal{A}}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е } k \text{ пъти класически } \rho\text{-диференцируема}\}$$

$$\mathcal{L}_{\varphi}^k(U) := \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^k(U, {}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow \mathcal{B} \mid f \text{ е } k \text{ пъти класически } \varphi\text{-диференцируема}\}.$$

Дефиниция 1.1.2 (Строга Фреше ρ/φ -диференцируемост): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

(1) Строга Фреше ρ/φ -диференцируемост в точка: нека $Z_0 \in U$.

(i) Постановка на представяне: функция $f: U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ се нарича *строго Фреше ρ -диференцируема* в Z_0 , ако съществува $v \in M$ такава, че

$$\begin{aligned} f(Z_0 + H) &= f(Z_0) + H \cdot v + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \rho(H)v + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \hat{v}(H) + r(H), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

където $\|r(H)\|_M = o(\|\rho(H)\|_{\text{End}})$ за $H \rightarrow 0$. В този случай $f'(Z_0) := v$, *канонично отъждествена* с $f'(Z_0) := \hat{v} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, M) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, M)$, се нарича ρ -производна на f в Z_0 .

(ii) Постановка на морфизъм: функция $f: U \rightarrow \mathcal{B}$ се нарича *строго Фреше φ -диференцируема* в Z_0 , ако съществува $B \in \mathcal{B}$ такава, че

$$\begin{aligned} f(Z_0 + H) &= f(Z_0) + H \cdot B + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + B\varphi(H) + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \hat{B}(H) + r(H), \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

където $\|r(H)\|_{\mathcal{B}} = o(\|\varphi(H)\|_{\mathcal{B}})$ за $H \rightarrow 0$. В този случай $f'(Z_0) := B$, *канонично отъждествена* с $f'(Z_0) := \hat{B} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, се нарича φ -производна на f в Z_0 .

(2) f се нарича *строго Фреше ρ/φ -диференцируема* ако е строго Фреше ρ/φ -диференцируема навсякъде в U .

(3) Пространства от строго Фреше ρ/φ -диференцируеми функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U, {}_\mathcal{A}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е строго Фреше } \rho\text{-диференцируема}\} \\ \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U, {}_\mathcal{A}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow \mathcal{B} \mid f \text{ е строго Фреше } \varphi\text{-диференцируема}\} \\ \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U) &:= \mathcal{F}_{\text{id}_\mathcal{A}}^{\text{str}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U, \mathcal{A}).\end{aligned}$$

(4) Пространства от k -кратно строго Фреше ρ/φ -диференцируеми функции: за $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ също полагаме

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str},k}(U, {}_\mathcal{A}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е } k \text{ пъти строго Фреше } \rho\text{-диференцируема}\} \\ \mathcal{F}_\varphi^{\text{str},k}(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str},k}(U, {}_\mathcal{A}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow \mathcal{B} \mid f \text{ е } k \text{ пъти строго Фреше } \varphi\text{-диференцируема}\}.\end{aligned}$$

Дефиниция 1.1.3 (Фреше ρ/φ -диференцируемост): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

(1) Фреше ρ/φ -диференцируемост в точка: нека $Z_0 \in U$.

(i) Постановка на представяне: функция $f: U \rightarrow {}_\mathcal{A}M$ се нарича *Фреше ρ -диференцируема* в Z_0 , ако съществува $v \in M$ такава, че

$$\begin{aligned}f(Z_0 + H) &= f(Z_0) + H \cdot v + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \rho(H)v + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \hat{v}(H) + r(H),\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

където $\|r(H)\|_M = o(\|H\|_\mathcal{A})$ за $H \rightarrow 0$. В този случай $f'(Z_0) := v$, *канонично отъждествена* с $f'(Z_0) := \hat{v} \in \text{Hom}_\mathcal{A}(\mathcal{A}, M) \subseteq \text{Hom}_\mathbb{K}(\mathcal{A}, M)$, се нарича ρ -производна f в Z_0 .

(ii) Постановка на морфизъм: функция $f: U \rightarrow \mathcal{B}$ се нарича *Фреше φ -диференцируема* в Z_0 , ако съществува $B \in \mathcal{B}$ такава, че

$$\begin{aligned}f(Z_0 + H) &= f(Z_0) + H \cdot B + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + B\varphi(H) + r(H) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f(Z_0) + \hat{B}(H) + r(H),\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

където $\|r(H)\|_\mathcal{B} = o(\|H\|_\mathcal{A})$ за $H \rightarrow 0$. В този случай $f'(Z_0) := B$, *канонично отъждествена* с $f'(Z_0) := \hat{B} \in \text{Hom}_\mathcal{A}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subseteq \text{Hom}_\mathbb{K}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, се нарича φ -производна f в Z_0 .

(2) f се нарича *Фреше ρ/φ -диференцируема* ако е Фреше ρ/φ -диференцируема навсякъде в U .

(3) Пространства от Фреше ρ/φ -диференцируеми функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\rho(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е Фреше } \rho\text{-диференцируема}\} \\ \mathcal{F}_\varphi(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow \mathcal{B} \mid f \text{ е Фреше } \varphi\text{-диференцируема}\} \\ \mathcal{F}_\mathcal{A}(U) &:= \mathcal{F}_{\text{id}_\mathcal{A}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, \mathcal{A}).\end{aligned}$$

(4) Пространства от k -кратно Фреше ρ/φ -диференцируеми функции: за $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ също полагаме

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\rho^k(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}^k(U, {}_\mathcal{A}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е } k \text{ пъти Фреше } \rho\text{-диференцируема}\} \\ \mathcal{F}_\varphi^k(U) &:= \mathcal{F}_\mathcal{A}^k(U, {}_\mathcal{A}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow \mathcal{B} \mid f \text{ е } k \text{ пъти Фреше } \varphi\text{-диференцируема}\}.\end{aligned}$$

Дефиниция 1.1.4: Нека $X \in \text{Тор}$ и $x_0 \in X$. Тогава $D \subseteq X$ се нарича *гъста околност* на x_0 ако $\bar{D}$ е околност на x_0 . Забележете, че не изискваме $D \ni x_0$.

Дефиниция 1.1.5: Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) са две метрични пространства, $x_0 \in X$ точка и $f: X \rightarrow Y$ изображение. Тогава f се нарича *гъсто (секвенциално) непрекъсната* в x_0 , ако съществува гъста околност D на x_0 такава, че

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x) = f(x_0).$$

В този случай, f ще се нарича *(секвенциално) гъсто непрекъсната в x_0 относно D* или накратко *(секвенциално) D -непрекъсната в x_0* .

Дефиниция 1.1.6 (D -ограничена класическа ρ -диференцируемост): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено, $f: U \rightarrow {}_\mathcal{A}M$ изображение, $Z_0 \in U$ точка и фиксираме гъста околност $D \subseteq \mathcal{A}_\rho^\times$ на 0.

(1) f се нарича *класически D - ρ -диференцируема* в Z_0 , ако границата на следното частно на нарастванията съществува:

$$f'_D(Z_0) := \lim_{\substack{H \rightarrow 0 \\ H \in D \cap (U - Z_0)}} \rho(H)^{-1}(f(Z_0 + H) - f(Z_0)).\tag{1.1.8}$$

- (2) f се нарича *класически D - ρ -диференцируема*, ако е класически D - ρ -диференцируема навсякъде в U .
- (3) Пространства от класически D - ρ -диференцируеми функции:

$$\mathcal{L}_{D,\rho}(U) := \mathcal{L}_{D,\mathcal{A}}(U, {}_{\mathcal{A}}M) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е класически } D\text{-}\rho\text{-диференцируема}\}.$$

Твърдение 1.1.7 (Непрекъснатост на $\mathcal{L}_{D,\rho}$ -диференцируемите функции): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $D \subseteq \mathcal{A}_\rho^\times$ гъсто дефинирана околност на 0. Тогава $\mathcal{L}_{D,\mathcal{A}}(U, {}_{\mathcal{A}}M) \subseteq \mathcal{C}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$.

Лема 1.1.8 (Принцип на гъсто заместване): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $D \subseteq \mathcal{A}_\rho^\times$ произволна гъсто дефинирана околност на 0. Тогава $\mathcal{L}_\rho(U) = \mathcal{L}_{D,\rho}(U)$ и $\forall f \in \mathcal{L}_\rho(U): f' = f'_D$.

Твърдение 1.1.9: Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогава $\mathcal{L}_\rho^k(U) \subseteq \mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}(U) \subseteq \mathcal{F}_\rho^k(U) \subseteq \mathcal{F}_\mathbb{R}(U, M)$. Освен това, ако ρ е инективно, тогава всъщност $\mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}(U) = \mathcal{F}_\rho^k(U)$.

Твърдение 1.1.10 (Инфинитезимально запазване на идеали): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено, $Z_0 \in U$, и $f \in \mathcal{F}_\rho(U) \cap \mathcal{C}^1(U, M)$. Ако $H \in \mathfrak{a} \triangleleft \mathcal{A}$ такава, че $[Z_0, Z_0 + H] \subseteq U$, тогава $f(Z_0 + H) - f(Z_0) \in \rho(\mathfrak{a})M$. В частност, ако $f \in \mathcal{F}_\mathcal{A}(U) \cap \mathcal{C}^1(U, \mathcal{A})$, имаме накратко $\Delta Z \in \mathfrak{a} \Rightarrow \Delta f \in \mathfrak{a}$.

Лема 1.1.11: Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено. Тогава $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}_\rho^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, M) = \mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}(U) \cap \mathcal{C}^k(U, M) = \mathcal{F}_\rho^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, M).$$

Дефиниция 1.1.12: Нека $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_\mathbb{K}$, $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M)$ представяне, $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ морфизъм и $U \subseteq \mathcal{A}$ отворено.

- (1) За $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ полагаме:

$$\mathcal{C}_\rho^k(U) := \mathcal{C}_\mathcal{A}^k(U, {}_{\mathcal{A}}M) := \mathcal{L}_\rho^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, M) = \mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}(U) \cap \mathcal{C}^k(U, M) = \mathcal{F}_\rho^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, M)$$

$$\mathcal{C}_\varphi^k(U) := \mathcal{C}_\mathcal{A}^k(U, {}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) := \mathcal{L}_\varphi^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{B}) = \mathcal{F}_\varphi^{\text{str},k}(U) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{B}) = \mathcal{F}_\varphi^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{B})$$

$$\mathcal{C}_\mathcal{A}^k(U) := \mathcal{C}_{\text{id}_\mathcal{A}}^k(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_\mathcal{A}^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{A}) = \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str},k}(U) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{A}) = \mathcal{F}_\mathcal{A}^k(U) \cap \mathcal{C}^k(U, \mathcal{A}).$$

Ако f е елемент на някое от тези пространства, тогава f ще се нарича съответно *k -кратно непрекъснато $\rho/\varphi/\mathcal{A}$ -диференцируема*.

- (2) $\mathcal{A}$ -аналитичност:

- (i) Постановка на представяне: функция $f: U \rightarrow M$ се нарича *ρ -аналитична* или *$\mathcal{A}$ -аналитична*¹ (върху U) ако всяко $Z_0 \in U$ допуска околност $\mathcal{N} \ni Z_0$, за която съществуват $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset M$ такива, че $f|_{\mathcal{N}}$ се задава чрез формален степенен ред

$$f|_{\mathcal{N}}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} (Z - Z_0)^k \cdot v_k \in {}_{\mathcal{A}}M[[Z - Z_0]] \quad (1.1.9)$$

поточково сходящ относно $\|\cdot\|_M$ за всички $Z \in \mathcal{N}$. Ще означаваме чрез ${}_{\mathcal{A}}M\{Z\}$ подмножеството на ${}_{\mathcal{A}}M[[Z]]$ от всички степенни редове, които са поточково сходящи в някаква околност на $0 \in \mathcal{A}$.

- (ii) Постановка на морфизъм: функция $f: U \rightarrow \mathcal{B}$ се нарича *φ -аналитична* или *$\mathcal{A}$ -аналитична*² (върху U), ако всяко $Z_0 \in U$ допуска околност $\mathcal{N} \ni Z_0$, за която съществуват $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{B}$ такива, че $f|_{\mathcal{N}}$ се задава чрез формален степенен ред

$$f|_{\mathcal{N}}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \varphi(Z - Z_0)^k \quad (1.1.10)$$

поточково сходящ относно $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ за всички $Z \in \mathcal{N}$. Ще означаваме чрез $\mathcal{B}_\varphi\{Z\} := \mathcal{B}\{\varphi(Z)\}$ подмножеството на $\mathcal{B}_\varphi[[Z]] := \mathcal{B}[[\varphi(Z)]]$ от всички степенни редове, които са поточково сходящи в някаква околност на $0_{\mathcal{A}}$.

- (iii) Пространства от $\mathcal{A}$ -аналитични функции:

$$\mathcal{C}_\rho^\omega(U) := \mathcal{C}_\mathcal{A}^\omega(U, {}_{\mathcal{A}}M) := \{f: U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M \mid f \text{ е } \rho\text{-аналитична}\}$$

$$\mathcal{C}_\varphi^\omega(U) := \mathcal{C}_\mathcal{A}^\omega(U, {}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \mid f \text{ е } \varphi\text{-аналитична}\}$$

$$\mathcal{C}_\mathcal{A}^\omega(U) := \mathcal{C}_{\text{id}_\mathcal{A}}^\omega(U)$$

¹когато ${}_{\mathcal{A}}M$ е е зададен вместо ρ ;

²когато $\mathcal{B} \in \text{FdCAlg}(\mathcal{A})$ е е зададен вместо φ ;

- (3) В специалния случай $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ също полагаме

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\rho(U) &:= \mathcal{O}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M) := \mathcal{L}_\rho(U) = \mathcal{F}_\rho^{\text{str}}(U) = \mathcal{F}_\rho(U) \\ \mathcal{O}_\varphi(U) &:= \mathcal{O}_\varphi(U, {}_\mathcal{A}M) := \mathcal{L}_\varphi(U) = \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U) = \mathcal{F}_\varphi(U) \\ \mathcal{O}_\mathcal{A}(U) &:= \mathcal{O}_{\text{id}_\mathcal{A}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_\mathcal{A}(U) = \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U) = \mathcal{F}_\mathcal{A}(U).\end{aligned}$$

Ако f е елемент на тези пространства, тогава f ще се нарича съответно $\rho/\varphi/\mathcal{A}$ -холоморфна.

Твърдение 1.1.13: Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.

- (1) Имаме:

$$\mathcal{F}_\mathcal{A}^n(U, {}_\mathcal{A}M) = \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M) \cap \mathcal{F}_\mathbb{R}^n(U, M). \quad (1.1.11)$$

Откъдето в частност:

$$\mathcal{C}_\mathcal{A}^n(U, {}_\mathcal{A}M) = \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M) \cap \mathcal{C}^n(U, M). \quad (1.1.12)$$

- (2) Развитие в ред на Тейлър: нека $n < \infty$.

- (i) Пеано форма на остатъчния член: ако $f \in \mathcal{F}_\rho^n(U)$, тогава $\forall [Z, Z+H] \subseteq U$:

$$\begin{aligned}f(Z+H) &= \sum_{k=0}^n H^k \cdot \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} + r_n(H), \\ r_n(H) &:= r_n(Z; H) = o(\|\rho(H)^n\|_{\text{End}}) \text{ като } H \rightarrow 0\end{aligned} \quad (1.1.13)$$

- (ii) Интегрална форма на остатъчния член: ако $f \in \mathcal{C}_\rho^n(U)$, тогава $\forall [Z, Z+H] \subseteq U$:

$$\begin{aligned}f(Z+H) &= \sum_{k=0}^{n-1} H^k \cdot \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} + R_n(H) = \sum_{k=0}^n H^k \cdot \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} + r_n(H), \\ R_n(H) &:= R_n(Z; H) = \frac{H^n}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 f^{(n)}(Z+tH)(1-t)^{n-1} dt, \\ r_n(H) &\stackrel{\text{def}}{=} r_n(Z; H) = R_n(Z; H) - H^n \cdot \frac{f^{(n)}(Z)}{n!}.\end{aligned} \quad (1.1.14)$$

- (3) Ако $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, тогава $\mathcal{O}_\rho(U) = \mathcal{C}_\rho^\omega(U)$.

Твърдение 1.1.14: Нека $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ е морфизъм в $\text{FdCAlg}_\mathbb{K}$ и $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M)$ крайномерно представяне.

- (1) Константи: тавтологично, $\varphi \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}_\varphi(\mathcal{A})$ с $\varphi': \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $Z \mapsto 1_\mathcal{B}$.

- (2) $\mathcal{L}_\rho, \mathcal{F}_\rho^{\text{str}}, \mathcal{F}_\rho$ са снопове на леви $\text{End}_\mathcal{A}(M)$ -модули над $|\mathcal{A}|$. По-точно:

- (i) Ляво действие на $\text{End}_\mathcal{A}(M)$: ако $\Phi \in \text{End}_\mathcal{A}(M)$, тогава

- $\forall f \in \mathcal{L}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M): \Phi f \in \mathcal{L}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M)$
- $\forall f \in \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U, {}_\mathcal{A}M): \Phi f \in \mathcal{F}_\mathcal{A}^{\text{str}}(U, {}_\mathcal{A}M)$
- $\forall f \in \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M): \Phi f \in \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M)$

където $(\Phi f)' = \Phi f'$ във всичките три случая.

- (ii) Адитивност:

- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}_\rho(U): f_1 + f_2 \in \mathcal{L}_\rho(U)$
- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\rho^{\text{str}}(U): f_1 + f_2 \in \mathcal{F}_\rho^{\text{str}}(U)$
- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\rho(U): f_1 + f_2 \in \mathcal{F}_\rho(U)$

където $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$ във всичките три случая.

- (3) Смесено правило на Лайбниц: ако $\lambda: \mathcal{B} \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M)$ такова, че $\rho = \varphi^* \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \circ \varphi$, тоест

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \text{End}_\mathbb{K}(M) \\ \varphi \downarrow & \nearrow \lambda & \\ \mathcal{B} & & \end{array}$$

тогава

- $\mathcal{L}_\rho \in \text{Mod}(\mathcal{L}_\varphi)$, т.е. $\forall f \in \mathcal{L}_\varphi(U) \forall g \in \mathcal{L}_\rho(U): f \cdot g \in \mathcal{L}_\rho(U)$;
- $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}} \in \text{Mod}(\mathcal{F}_\varphi^{\text{str}})$, т.е. $\forall f \in \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U) \forall g \in \mathcal{F}_\rho^{\text{str}}(U): f \cdot g \in \mathcal{F}_\rho^{\text{str}}(U)$, при условие че $\text{Ker}(\rho) = \text{Ker}(\varphi)$;
- $\mathcal{F}_\rho \in \text{Mod}(\mathcal{F}_\varphi)$, т.е. $\forall f \in \mathcal{F}_\varphi(U) \forall g \in \mathcal{F}_\rho(U): f \cdot g \in \mathcal{F}_\rho(U)$;

където $(fg)' = f'g + fg'$ във всичките три случая.

- (4) $\mathcal{L}_\varphi, \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}, \mathcal{F}_\varphi$ са снопове на $\mathcal{B}$ -алгебри над $|\mathcal{A}|$. По-точно:

- (i) $\mathcal{B}$ -действие: ако $b \in \mathcal{B}$, тогава

- $\forall f \in \mathcal{L}_\varphi(U): bf \in \mathcal{L}_\varphi(U)$
- $\forall f \in \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U): bf \in \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U)$
- $\forall f \in \mathcal{F}_\varphi(U): bf \in \mathcal{F}_\varphi(U)$

където $(bf)' = bf'$ във всичките три случая.

(ii) Правило на Лайбниц:

- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}_\varphi(U): f_1 f_2 \in \mathcal{L}_\varphi(U)$
- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U): f_1 f_2 \in \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U)$
- $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_\varphi(U): f_1 f_2 \in \mathcal{F}_\varphi(U)$

където $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$ във всичките три случая.

(5) Ако $k \in \mathbb{N}$, тогава:

- (i) $\mathcal{L}_\rho^k, \mathcal{F}_\rho^{\text{str},k}, \mathcal{F}_\rho^k$ и $\mathcal{C}_\rho^k$ са снопове на $\text{left End}_{\mathcal{A}}(M)$ -модули върху $|\mathcal{A}|$;
- (ii) $\mathcal{L}_\varphi^k, \mathcal{F}_\varphi^{\text{str},k}, \mathcal{F}_\varphi^k$ и $\mathcal{C}_\varphi^k$ са снопове на $\mathcal{B}$ -алгебри върху $|\mathcal{A}|$.

- (6) $\mathcal{C}_\rho^\infty$ и $\mathcal{C}_\rho^\omega$ са снопове от леви $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ -модули върху $|\mathcal{A}|$ с отличено „диференциране“ (тук само отличено $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ -линейна изобразяване) $\partial: f \mapsto f'$.
- (7) $\mathcal{C}_\varphi^\infty$ и $\mathcal{C}_\varphi^\omega$ са снопове на диференциални $\mathcal{B}$ -алгебри върху $|\mathcal{A}|$ с отличено диференциране дадено чрез $\partial: f \mapsto f'$.
- (8) Ако $\rho = \varphi^* \lambda$ както в (3), тогава $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}: \mathcal{C}_\rho^k \in \text{Mod}(\mathcal{C}_\varphi^k)$. За $k \in \{\infty, \omega\}$ то също има отличено диференциране $\partial: f \mapsto f'$ в смисъла на (3). С други думи, $(\mathcal{C}_\rho^\infty, \partial)$ и $(\mathcal{C}_\rho^\omega, \partial)$ са снопове на диференциални модули над снопове на диференциални $\mathcal{B}$ -алгебри $(\mathcal{C}_\varphi^\infty, \partial)$ и $(\mathcal{C}_\varphi^\omega, \partial)$, съответно, или накратко просто диференциални $(\mathcal{C}_\varphi^\infty, \partial)$ -, съответно $(\mathcal{C}_\varphi^\omega, \partial)$ -модули върху $|\mathcal{A}|$.

Твърдение 1.1.15 (Правила за верижно диференциране с функции): Нека $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$ и $M \in \text{FdMod}(\mathcal{B})$. Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ и $V \subseteq \mathcal{B}$ е отворено и $f \in \mathcal{C}(U, \mathcal{B})$ такова, че $f(U) \subseteq V$. Имаме:

- (1) Ако $g \in \mathcal{F}_B^{\text{str}}(V, {}_{\mathcal{B}}M)$ и $f \in \mathcal{C}_A^1(U, \mathcal{B})$, тогава $g \circ f \in \mathcal{F}_A^{\text{str}}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\forall Z \in U: (g \circ f)'(Z) = \rho(f'(Z))g'(f(Z))$.
- (2) В частност, ако $g \in \mathcal{F}_B^{\text{str}}(V)$ и $f \in \mathcal{C}_\varphi^1(U)$, тогава $g \circ f \in \mathcal{F}_{\psi \circ \varphi}^{\text{str}}(U)$ и $\forall Z \in U: (g \circ f)'(Z) = \psi(f'(Z))g'(f(Z))$.
- (3) Ако $g \in \mathcal{F}_B(V, {}_{\mathcal{B}}M)$ и $f \in \mathcal{F}_A(U, \mathcal{B})$, тогава $g \circ f \in \mathcal{F}_A(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\forall Z \in U: (g \circ f)'(Z) = \rho(f'(Z))g'(f(Z))$.
- (4) В частност, ако $g \in \mathcal{F}_\psi(V)$ и $f \in \mathcal{F}_\varphi(U)$, тогава $g \circ f \in \mathcal{F}_{\psi \circ \varphi}(U)$ и $\forall Z \in U: (g \circ f)'(Z) = \psi(f'(Z))g'(f(Z))$.

Твърдение 1.1.16 (Правила за верижно диференциране с хомоморфизми): Нека $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ е морфизъм и нека $U \subseteq \mathcal{A}$, $V \subseteq \mathcal{B}$ е отворено.

- (1) Пре-композиция с морфизъм $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$: при дадено $\varphi(U) \subseteq V$ и $M \in \text{FdMod}(\mathcal{B})$ имаме:
 - (i) Ако $g \in \mathcal{L}_B(V, {}_{\mathcal{B}}M)$, тогава $g \circ \varphi \in \mathcal{L}_A(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\forall Z \in U: (g \circ \varphi)(Z) = g'(\varphi(Z))$.
 - (ii) Ако $g \in \mathcal{F}_B^{\text{str}}(V, {}_{\mathcal{B}}M)$, тогава $g \circ \varphi \in \mathcal{F}_A^{\text{str}}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\forall Z \in U: (g \circ \varphi)(Z) = g'(\varphi(Z))$.
 - (iii) Ако $g \in \mathcal{F}_B(V, {}_{\mathcal{B}}M)$, тогава $g \circ \varphi \in \mathcal{F}_A(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\forall Z \in U: (g \circ \varphi)(Z) = g'(\varphi(Z))$.
- (2) Пост-композиция с хомоморфизъм на модули $\Phi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}({}_{\mathcal{A}}M, {}_{\mathcal{A}}N)$:
 - (i) Ако $f \in \mathcal{L}_A(U, {}_{\mathcal{A}}M)$, тогава $\Phi \circ f \in \mathcal{L}_A(U, {}_{\mathcal{A}}N)$ и $\forall Z \in U: (\Phi \circ f)'(Z) = \Phi(f'(Z))$.
 - (ii) Ако $f \in \mathcal{F}_A^{\text{str}}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\text{Ann}_{\mathcal{A}}(N) \subseteq \text{Ann}_{\mathcal{A}}(M)$, тогава $\Phi \circ f \in \mathcal{F}_A^{\text{str}}(U, {}_{\mathcal{A}}N)$ и $\forall Z \in U: (\Phi \circ f)'(Z) = \Phi(f'(Z))$.
 - (iii) Ако $f \in \mathcal{F}_A(U, {}_{\mathcal{A}}M)$, тогава $\Phi \circ f \in \mathcal{F}_A(U, {}_{\mathcal{A}}N)$ и $\forall Z \in U: (\Phi \circ f)'(Z) = \Phi(f'(Z))$.
- (3) Пост-композиция с морфизъм на алгебри $\mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$:
 - (i) Ако $f \in \mathcal{L}_\varphi(U)$, тогава $\psi \circ f \in \mathcal{L}_{\psi \circ \varphi}(U)$ и $\forall Z \in U: (\psi \circ f)'(Z) = \psi(f'(Z))$.
 - (ii) Ако $f \in \mathcal{F}_\varphi^{\text{str}}(U)$ и $\psi|_{\text{Im}(\varphi)}$ е инективно, тогава $\psi \circ f \in \mathcal{F}_{\psi \circ \varphi}^{\text{str}}(U)$ и $\forall Z \in U: (\psi \circ f)'(Z) = \psi(f'(Z))$.
 - (iii) Ако $f \in \mathcal{F}_\varphi(U)$, тогава $\psi \circ f \in \mathcal{F}_{\psi \circ \varphi}(U)$ и $\forall Z \in U: (\psi \circ f)'(Z) = \psi(f'(Z))$.

За $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ с $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) = n$ нека означим с $\rho_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) \cong M_n(\mathbb{K})$ регулярното представяне на $\mathcal{A}$ след избор на $\mathbb{K}$ -базис $\{a_1, \dots, a_n\}$ за $\mathcal{A}$.

Твърдение 1.1.17 (ρ -производна и Якобиан на f): Нека $Z_0 \in \mathcal{A}$.

(1) Постановка на представяне: ако $f: \mathcal{A} \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ е ρ -диференцируема в Z_0 , тогава

$$\Upsilon_M(f'(Z_0)) = (J_{\mathbb{K}}f)(Z_0) \in \mathbb{K}^{m \times n}. \quad (1.1.15)$$

(2) Относителна постановка: ако $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ е φ -диференцируема в Z_0 , тогава

$$\Upsilon_B(f'(Z_0)) = \rho_B(f'(Z_0)) \circ \varphi = (J_{\mathbb{K}}f)(Z_0) \in \mathbb{K}^{m \times n}. \quad (1.1.16)$$

1.2. Канонични факторизации и продължения

Теорема 1.2.1 (Факторизация през епиморфизми): Нека $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ е представяне, $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ морфизъм в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, $U \subseteq \mathcal{A}$ отворено, и $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Ако $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$ за някакъв епиморфизъм $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, тогава $\forall f \in \mathcal{F}_{\rho}^{\text{str},k}(U) \exists \bar{f} \in \mathcal{F}_{\bar{\rho}}^{\text{str},k}(\pi(U))$: $f = \bar{f} \circ \pi$, и в този случай $f' = \bar{f}' \circ \pi$. С други думи, имаме импликация на комутативни диаграми:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \text{End}_{\mathbb{K}}(M) & & U & \xrightarrow{f} & M \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\rho} & & \Rightarrow & \pi \downarrow & \nearrow \exists_1 \bar{f} & \\ \bar{\mathcal{A}} & & & & \pi(U) & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f'} & M \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f}' & \\ \pi(U) & & \end{array}$$

Оттук следва, че всяко $f \in \mathcal{F}_{\rho}^{\text{str},k}(U)$ допуска канонично $\mathcal{F}_{\rho}^{\text{str},k}$ -диференцируемо продължение f^{π} към $U^{\pi} \stackrel{\text{def}}{=} U + \text{Ker}(\pi)$, и имаме канонични изоморфизми на леви $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ -модули:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\rho}^{\text{str},k}(U) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{\bar{\rho}}^{\text{str},k}(\pi(U)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{\rho}^{\text{str},k}(U^{\pi}) \\ f &\mapsto \bar{f} \mapsto f^{\pi} := \pi^{*}(\bar{f}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f} \circ \pi. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

- (2) При хипотезата на (1), ако допълнително $f \in \mathcal{L}_{\rho}^k(U)$, тогава всъщност $\bar{f} \in \mathcal{L}_{\bar{\rho}}^k(\pi(U))$. Оттук следва, че всяко $f \in \mathcal{L}_{\rho}^k(U)$ допуска канонично $\mathcal{L}_{\rho}^k$ -диференцируемо продължение f^{π} към $U^{\pi} \stackrel{\text{def}}{=} U + \text{Ker}(\pi)$, и имаме канонични изоморфизми на леви $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ -модули:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho}^k(U) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_{\bar{\rho}}^k(\pi(U)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}_{\rho}^k(U^{\pi}) \\ f &\mapsto \bar{f} \mapsto f^{\pi} := \pi^{*}(\bar{f}). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Теорема 1.2.2 (Натуралност относно произведения): Нека $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Вътрешни директни произведения (диференцируемост на компонентите): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

- (i) Постановка на представяне: нека ${}_{\mathcal{A}}M = \bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k$ в $\text{Mod}(\mathcal{A})$ и $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow M$ за съответни компоненти. Тогава:

- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n(U, {}_{\mathcal{A}}M_k)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n(U, {}_{\mathcal{A}}M)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\text{str},n}(U, {}_{\mathcal{A}}M_k)) \Rightarrow f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\text{str},n}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^n(U, {}_{\mathcal{A}}M_k)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^n(U, {}_{\mathcal{A}}M)$.

И в трите случая имаме:

$$(\bigoplus_{k=1}^m f_k(Z))' = \bigoplus_{k=1}^m f_k'(Z). \quad (1.2.3)$$

Оттук следва, че имаме равенства

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n(-, {}_{\mathcal{A}}M_k) &= \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n\left(-, \bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k\right) \\ \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^n(-, {}_{\mathcal{A}}M_k) &= \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^n\left(-, \bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k\right) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

на снопове на леви $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ -модули, но само включване

$$\bigoplus_{k=1}^m \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\text{str},n}(-, {}_{\mathcal{A}}M_k) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\text{str},n}\left(-, \bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k\right) \quad (1.2.5)$$

на снопове от $\prod_{k=1}^m \text{End}_{\mathcal{A}}(M_k)$ -модули.

- (ii) Постановка на морфизъм: нека $\mathcal{B} = \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ и нека означим $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathcal{B}$ за съответни компоненти. Тогава:

- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{L}_{\varphi_k}^n(U)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{\varphi}^n(U)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\varphi_k}^{\text{str},n}(U)) \Rightarrow f \in \mathcal{F}_{\varphi}^{\text{str},n}(U)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\varphi_k}^n(U)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{F}_{\varphi}^n(U)$.

И в трите случая имаме:

$$(f_1(Z), \dots, f_m(Z))' = (f_1'(Z), \dots, f_m'(Z)). \quad (1.2.6)$$

Оттук следва, че имаме равенства

$$\prod_{k=1}^m \mathcal{L}_{\varphi_k}^n = \mathcal{L}_{\varphi}^n \text{ и } \prod_{k=1}^m \mathcal{F}_{\varphi_k}^n = \mathcal{F}_{\varphi}^n, \quad (1.2.7)$$

НО САМО ВКЛЮЧВАНЕ

$$\prod_{k=1}^m \mathcal{F}_{\varphi_k}^{\text{str},n} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\varphi}^{\text{str},n} \quad (1.2.8)$$

на снопове от $\mathcal{B}$ -алгебри.

- (2) Външни директни произведения: нека $\{\mathcal{A}_k\}_{1 \leq k \leq m} \subset \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ е семейство, $U_k \subseteq \mathcal{A}_k$, $1 \leq k \leq m$, е отворено, и полагаме $\mathcal{A} := \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_k$ и $U := \prod_{k=1}^m U_k \subseteq \mathcal{A}$.

- (i) Постановка на представяне: нека $\rho_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M_k)$, $1 \leq k \leq m$, е съответстващо семейство от представления и да положим $M := \times_{k=1}^m \mathcal{A}_k M_k$. Тогава:

- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}_k}^n(U_k, \mathcal{A}_k M_k)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n(U, \mathcal{A}M)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_k}^{\text{str},n}(U_k, \mathcal{A}_k M_k)) \Rightarrow f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\text{str},n}(U, \mathcal{A}M)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}_k}^n(U_k, \mathcal{A}_k M_k)) \Rightarrow f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^n(U, \mathcal{A}M)$.

И в трите случая имаме:

$$(\times_{k=1}^m f_k(Z_k))' = \times_{k=1}^m f_k'(Z_k). \quad (1.2.9)$$

С други думи имаме равенство

$$\prod_{k=1}^m \mathcal{L}_{\mathcal{A}_k}^n(U_k, \mathcal{A}_k M_k) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n\left(\prod_{k=1}^m U_k, \times_{k=1}^m \mathcal{A}_k M_k\right), \quad (1.2.10)$$

НО САМО ВКЛЮЧВАНИЯ

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m \mathcal{F}_{\mathcal{A}_k}^{\text{str},n}(U_k, \mathcal{A}_k M_k) &\hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{\text{str},n}\left(\prod_{k=1}^m U_k, \times_{k=1}^m \mathcal{A}_k M_k\right) \\ \prod_{k=1}^m \mathcal{F}_{\mathcal{A}_k}^n(U_k, \mathcal{A}_k M_k) &\hookrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{A}}^n\left(\prod_{k=1}^m U_k, \times_{k=1}^m \mathcal{A}_k M_k\right) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

на леви $\prod_{k=1}^m \text{End}_{\mathcal{A}_k}(M_k)$ -модули.

- (ii) Постановка на морфизъм: нека $\varphi_k: \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$, $1 \leq k \leq m$, е съответстващо семейство от морфизми в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ и да положим $\mathcal{B} := \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$. Тогава:

- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{L}_{\varphi_k}^n(U_k)) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_{\varphi}^n(U)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\varphi_k}^{\text{str},n}(U_k)) \Rightarrow f \in \mathcal{F}_{\varphi}^{\text{str},n}(U)$;
- $(\forall 1 \leq k \leq m: f_k \in \mathcal{F}_{\varphi_k}^n(U_k)) \Rightarrow f \in \mathcal{F}_{\varphi}^n(U)$.

И в трите случая имаме:

$$(\times_{k=1}^m f_k(Z_k))' = \times_{k=1}^m f_k'(Z_k). \quad (1.2.12)$$

С други думи имаме равенства

$$\prod_{k=1}^m \mathcal{L}_{\varphi_k}^n(U_k) = \mathcal{L}_{\times_{k=1}^m \varphi_k}^n\left(\prod_{k=1}^m U_k\right), \quad (1.2.13)$$

НО САМО ВКЛЮЧВАНИЯ

$$\prod_{k=1}^m \mathcal{F}_{\varphi_k}^{\text{str},n}(U_k) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\times_{k=1}^m \varphi_k}^{\text{str},n}\left(\prod_{k=1}^m U_k\right) \text{ и } \prod_{k=1}^m \mathcal{F}_{\varphi_k}^n(U_k) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\times_{k=1}^m \varphi_k}^n\left(\prod_{k=1}^m U_k\right) \quad (1.2.14)$$

на $\mathcal{B}$ -алгебри.

- (3) Канонично продължение за външни директни произведения: нека $\{\mathcal{A}_k\}_{1 \leq k \leq m} \subset \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ е семейство, да положим $\mathcal{A} := \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_k$, и нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $\tilde{U} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{U}_{[m]} \stackrel{\text{def}}{=} U_{[m]}$ проекционното му затваряне (относно даденото произведение).

- (i) Постановка на представяне: ако $M_k \in \text{FdMod}(\mathcal{A}_k)$, $1 \leq k \leq m$, е съответстващо семейство от модули и $M := \times_{k=1}^m \mathcal{A}_k M_k$, тогава всяко $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(U, \mathcal{A}M)$ допуска еднозначно $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ -диференцируемо продължение $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \mathcal{A}M$. Освен това имаме каноничен изоморфизъм

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n(U, \mathcal{A}M) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^n(\tilde{U}, \mathcal{A}M). \quad (1.2.15)$$

на леви $\prod_{k=1}^m \text{End}_{\mathcal{A}_k}(M_k)$ -модули.

- (ii) Постановка на морфизъм: ако $\mathcal{A}_k \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{B}_k$, $1 \leq k \leq m$, е съответстващо семейство от морфизми в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{B} := \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$, и $\varphi := \times_{k=1}^m \varphi_k$, тогава всяко $f \in \mathcal{L}_{\varphi}(U)$ допуска еднозначно $\mathcal{L}_{\varphi}$ -диференцируемо продължение $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \mathcal{B}$. Освен това имаме каноничен изоморфизъм

$$\mathcal{L}_{\varphi}^n(U) \cong \mathcal{L}_{\varphi}^n(\tilde{U}). \quad (1.2.16)$$

на $\mathcal{B}$ -алгебри.

Теорема 1.2.3 (Стандартна факторизация): С горните означения нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

- (1) Постановка на представяне: ако $f \in \mathcal{L}_\rho(U)$, тогава съществува единствено $\bar{f} = \times_{k=1}^m \bar{f}_k \in \mathcal{L}_{\bar{\rho}}(\bar{U})$ така, че имаме следната импликация на комутативни диаграми:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \text{End}_{\mathbb{K}}(M) & & U \xrightarrow{f} M \\ \Pi_\rho \downarrow & \nearrow \exists_1 \bar{\rho} & & \Rightarrow & \Pi_\rho \downarrow \nearrow \exists_1 \bar{f} \\ \bar{\mathcal{A}} & & & & \bar{U} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\exists_1 \bar{f}} & M \\ \Pi_\rho \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \bar{U} & & \end{array}$$

Тоест, $f \in \mathcal{L}_\rho(U)$ се продължава $\mathcal{L}_\rho$ -регулярно еднозначно до $\tilde{f} \in \mathcal{L}_\rho(\tilde{U})$. Оттук следва, че

$$\mathcal{L}_\rho(U) \cong \mathcal{L}_\rho(\tilde{U}) \quad (1.2.17)$$

като леви $(\text{End}_{\mathcal{A}}(M), \partial)$ -модули.

- (2) Постановка на морфизъм: ако $f \in \mathcal{L}_\varphi(U)$, тогава съществува единствено $\bar{f} = \times_{k=1}^m \bar{f}_k \in \mathcal{L}_{\bar{\varphi}}(\bar{U})$ така, че имаме следната импликация на комутативни диаграми:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} & & U \xrightarrow{f} \mathcal{B} \\ \Pi_\varphi \downarrow & \nearrow \exists_1 \bar{\varphi} & & \Rightarrow & \Pi_\varphi \downarrow \nearrow \exists_1 \bar{f} \\ \bar{\mathcal{A}} & & & & \bar{U} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\exists_1 \bar{f}} & \mathcal{B} \\ \Pi_\varphi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \bar{U} & & \end{array}$$

Тоест, $f \in \mathcal{L}_\varphi(U)$ се продължава $\mathcal{L}_\varphi$ -регулярно еднозначно към $\tilde{f} \in \mathcal{L}_\varphi(\tilde{U})$. Оттук следва, че

$$\mathcal{L}_\varphi(U) \cong \mathcal{L}_\varphi(\tilde{U}) \quad (1.2.18)$$

като диференциални $\mathcal{B}$ -алгебри.

Теорема 1.2.4 (Автоматично продължение): Нека $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{m}_j, \mathbb{K}_j)$ и $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

- (1) Постановка на представяне: ако $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ е крайномерно представяне и $f \in \mathcal{L}_\rho(U)$, тогава f се продължава $\mathcal{L}_\rho$ -регулярно еднозначно до $f := \tilde{f}^\rho: \tilde{U}^\rho \rightarrow M$ (злоупотреба с означенията), и имаме изоморфизъм

$$\mathcal{L}_\rho(U) \cong \mathcal{L}_\rho(\tilde{U}^\rho) \quad (1.2.19)$$

на $(\text{End}_{\mathcal{A}}(M), \partial)$ -модули.

- (2) Постановка на морфизъм: ако $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ е морфизъм в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ и $f \in \mathcal{L}_\varphi(U)$, тогава f се продължава $\mathcal{L}_\varphi$ -регулярно еднозначно до $f := \tilde{f}^\varphi: \tilde{U}^\varphi \rightarrow M$ (злоупотреба с означението), и имаме изоморфизъм

$$\mathcal{L}_\varphi(U) \cong \mathcal{L}_\varphi(\tilde{U}^\varphi) \quad (1.2.20)$$

на диференциални $\mathcal{B}$ -алгебри.

1.3. Хомогенни уравнение на Коши–Риман–Шеферс

Нека $\{a_1, \dots, a_n\}$ е някакъв $\mathbb{K}$ -базис на $\mathcal{A}$ и нека $\{v_1, \dots, v_m\}$ някакъв $\mathbb{K}$ -базис на $\mathcal{A}M$ (чрез представяне ρ). Освен това да обозначим чрез $(\alpha_{j\ell}^k)_{1 \leq j, k, \ell \leq n}$ и $(\gamma_{j\ell}^k)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k, \ell \leq m}$ структурните тензори съответно на $\mathcal{A}$ и ρ . Към това нека $1_{\mathcal{A}} =: \epsilon_1 a_1 + \dots + \epsilon_n a_n$ са координати на единицата на $\mathcal{A}$.

Твърдение 1.3.1 (Обобщени уравнения на Коши–Риман–Шеферс³): Нека да фиксираме $Z_0 \in \mathcal{A}$ и нека $f: \mathcal{A} \rightarrow M$ е функция с $f := f^1 v_1 + \dots + f^m v_m$ за някакви координатни функции $f^k: U \rightarrow \mathbb{K}$, $1 \leq k \leq m$.

- (1) Общ вид на ρ -диференцируемост: f е ρ -диференцируема в Z_0 тогава и само тогава, когато f е тотално $\mathbb{K}$ -диференцируема в Z_0 и съществува M -значна функция $g := g^1 v_1 + \dots + g^m v_m$ дефинирана в Z_0 такава, че

$$\forall 1 \leq j \leq n \forall 1 \leq k \leq m: \frac{\partial f^k}{\partial z^j} = \sum_{s=1}^m \gamma_{js}^k g^s \quad (1.3.1)$$

в Z_0 . В този случай, $f'(Z_0) = g(Z_0)$.⁴

- (2) Обобщени Коши–Риманови уравнения с единица: допускайки, че $a_1 = 1_{\mathcal{A}}$, f е ρ -диференцируема в Z_0 тогава и само тогава, когато f е тотално $\mathbb{K}$ -диференцируема в Z_0 и

$$\forall 2 \leq j \leq n \forall 1 \leq k \leq m: \frac{\partial f^k}{\partial z^j} = \sum_{s=1}^m \gamma_{js}^k \frac{\partial f^s}{\partial z^1} \quad (1.3.2)$$

в Z_0 . В този случай:

$$f'(Z_0) = \frac{\partial f}{\partial z^1}(Z_0) \quad (1.3.3)$$

В частност, ако $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$, тогава

$$\forall 2 \leq j \leq n \forall 1 \leq k \leq n: \frac{\partial f^k}{\partial z^j} = \frac{\partial}{\partial z^1} \sum_{r=1}^n \alpha_{jr}^k f^r \quad (1.3.4)$$

в Z_0 .

- (3) Обобщени уравнения на Коши–Риман–Шеферс: f е ρ -диференцируема в Z_0 тогава и само тогава, когато f е тотално $\mathbb{K}$ -диференцируема в Z_0 и

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \forall 1 \leq k \leq m: \left(\sum_{r=1}^n \alpha_{ij}^r \frac{\partial}{\partial z^r} \right) f^k = \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\sum_{s=1}^m \gamma_{is}^k f^s \right) \quad (1.3.5)$$

в Z_0 .

Дефиниция 1.3.2 (Обобщени оператори на Wirtinger): Нека $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, $M \in \text{FdMod}(\mathcal{A})$, и $U \subseteq \mathcal{A}$ отворено. За даден $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{A}$ $\mathbb{K}$ -базис и $f: U \rightarrow M$ частично $\mathbb{K}$ -диференцируема спрямо него в $Z_0 \in U$, дефинираме линейните диференциални оператори

$$(d_{ij}f)(Z_0) := a_i \cdot \frac{\partial f}{\partial z^j}(Z_0) - a_j \cdot \frac{\partial f}{\partial z^i}(Z_0), \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.3.6)$$

По-нататък, ако $a_1 = 1_{\mathcal{A}}$, също така полагаме

$$(d_jf)(Z_0) := (d_{1j}f)(Z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial z^j}(Z_0) - a_j \cdot \frac{\partial f}{\partial z^1}(Z_0), \quad 2 \leq j \leq n. \quad (1.3.7)$$

Лема 1.3.3: Нека $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, нека $\{a_1, \dots, a_n\}$ е $\mathbb{K}$ -базис за $\mathcal{A}$, $M \in \text{FdMod}(\mathcal{A})$, $U \subseteq \mathcal{A}$ отворено и $f: U \rightarrow M$ тотално $\mathbb{K}$ -диференцируема. Тогава

$$f \in \mathcal{F}_{\rho}(U) \Leftrightarrow f \in \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \text{Ker } d_{ij}. \quad (1.3.8)$$

Ако допълнително $a_1 = 1_{\mathcal{A}}$, тогава

$$f \in \mathcal{F}_{\rho}(U) \Leftrightarrow f \in \bigcap_{2 \leq j \leq n} \text{Ker } d_j. \quad (1.3.9)$$

³в чест на Georg Scheffers (1893), който е първият автор обобщил обичайните Коши–Риманови уравнения за случая на крайномерни унитарни комутативни асоциативни $\mathbb{C}$ -алгебри (вж. [Sch93a]);

⁴С други думи, g^k , $1 \leq k \leq m$, са координатните функции на кандидат-производната $g = f'$ когато тя съществува, да не се бърка с производните на координатните функции f^i , $1 \leq i \leq n$.

1.4. Асоциираната диференциална 1-форма и интегрируемост

Дефиниция 1.4.1: Нека $U \subseteq \mathcal{A}$. Полагаме накратко:

- (1) $\mathcal{P}U := \mathcal{C}_{\text{pw}}^1([0, 1], U)$;
- (2) $\mathcal{L}U := \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$.

Дефиниция 1.4.2: Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено, $f: U \rightarrow M$ функция, и $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

- (1) f се нарича $\mathcal{F}_\rho$ -интегрируема (върху U), ако $\exists F \in \mathcal{F}_\rho(U): F' = f$. В този случай F ще се нарича $\mathcal{F}_\rho$ -примитивна или -анти-производна на f (върху U). Тогава

$$\mathcal{F}_\rho^{-1}(U) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е } \mathcal{F}_\rho\text{-интегрируема}\}$$

ще означава пространството на всички $\mathcal{F}_\rho$ -интегрируеми функции върху U . По-общо, полагаме

$$\mathcal{F}_\rho^{-k}(U) := \{f: U \rightarrow M \mid f \text{ е } k\text{-кратно } \mathcal{F}_\rho\text{-интегрируема}\}.$$

- (2) f се нарича $\mathcal{C}_\rho^1$ -интегрируема (върху U), ако $\exists F \in \mathcal{C}_\rho^1(U): F' = f$. В този случай F ще се нарича $\mathcal{C}_\rho^1$ -примитивна или -анти-производна на f (върху U). Тогава

$$\mathcal{C}_\rho^{-1}(U) := \{f \in \mathcal{C}^0(U, M) \mid f \text{ е } \rho\text{-интегрируема}\}$$

ще обозначава пространството на всички $\mathcal{C}_\rho^1$ -интегрируеми функции върху U . По-общо, полагаме

$$\mathcal{C}_\rho^{-k}(U) := \{f \in \mathcal{C}^0(U, M) \mid f \text{ е } k\text{-кратно } \rho\text{-интегрируема}\}.$$

Твърдение 1.4.3 (Затвореност на ω): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено, $f: U \rightarrow M$ функция, и $\omega := f(Z) \cdot dZ$. Тогава:

$$f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(U, {}_{\mathcal{A}}M) \Leftrightarrow f \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(U, M) \text{ и } d_{\mathbb{K}}\omega = 0.$$

Твърдение 1.4.4 (Интегрална теорема на Коши над $\mathcal{A}$): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено с $\pi_0(U) = 1$ и нека $f \in \mathcal{C}^0(U, M)$.

- (1) Коши–Гурса над $\mathcal{A}$ без точка: ако $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(U \setminus \text{pt}, {}_{\mathcal{A}}M)$, тогава:

$$\forall \Delta \subseteq U: \oint_{\partial\Delta} \rho(dZ)f(Z) = 0. \quad (1.4.1)$$

- (2) Коши–Гурса над $\mathcal{A}$ без краен брой точки: ако $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(U \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, {}_{\mathcal{A}}M)$, тогава:

$$\forall \Delta \subseteq U: \oint_{\partial\Delta} \rho(dZ)f(Z) = 0. \quad (1.4.2)$$

- (3) Хомологична форма на интегралната теорема на Коши над $\mathcal{A}$: ако $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^1(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\Gamma \in Z_1(U, \mathbb{Z})$ е 1-цикъл с $[\Gamma] = 0$ в $H_1(U, \mathbb{Z})$, тогава

$$\int_{\Gamma} \rho(dZ)f(Z) = 0. \quad (1.4.3)$$

- (4) Хомотопична форма на интегралната теорема на Коши над $\mathcal{A}$: в частност, ако $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^1(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ и $\pi_1(U) = 1$, тогава:

$$\forall \gamma \in \mathcal{L}U: \oint_{\gamma} \rho(dZ)f(Z) = 0. \quad (1.4.4)$$

Твърдение 1.4.5 (Безкрайна интегрируемост): Нека $\mathcal{A} \in \text{FdCA}|\text{g}_{\mathbb{K}}$ и $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ е крайномерно представяне.

- (1) Ако $\star \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и звездно-конвексно, тогава $\mathcal{F}_\rho(\star) = \mathcal{F}_\rho^{-\infty}(\star)$.
- (2) Ако $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и хомологично 1-свързано, тогава $\mathcal{C}_\rho^1(U) = \mathcal{C}_\rho^{-\infty}(U)$.

2. Интегриране над $\mathcal{A}$

2.1. Допустими точки и допустими 1-цикли

Полагама накратко $\iota := \iota_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \iota_{I_\rho}$, и $\chi := \chi_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{I_\rho}$.

Дефиниция 2.1.1: Нека $G \in \text{Ab}$ и $\Gamma \in Z_1(U, G)$. Полагаме $\Gamma^{\text{sp}} := (\iota \circ \chi)_\# \Gamma \in Z_1(\widehat{U}, G)$.

Дефиниция 2.1.2 (Допустими точки): Нека да фиксираме $I \subseteq [n]$.

(1) I -забранена зона на точки за контур: ако $\gamma \in \mathcal{LU}$, тогава:

$$\mathfrak{F}(\gamma) := \mathfrak{F}_I(\gamma) := \bigcup_{j \in I} \chi_j^{-1}(\gamma_j^{\text{sp}}) \stackrel{\text{def}}{=} \{Z \in \mathcal{A} \mid \exists j \in I: z_j \in \gamma_j^{\text{sp}}\}.$$

(2) I -допустима зона на точки за контур: ако $\gamma \in \mathcal{LU}$, тогава

$$\begin{aligned} \text{Adm}(\gamma) &:= \text{Adm}_I(\gamma) := \mathfrak{F}_I(\gamma)^c \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathfrak{F}_I(\gamma)} \stackrel{\text{def}}{=} \{Z \in \mathcal{A} \mid \forall j \in I: z_j \notin \gamma_j^{\text{sp}}\} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \begin{cases} (\mathbb{C} \setminus \gamma_j^{\text{sp}}) \times \mathfrak{m}_j, & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

(3) I -забранена зона на точки за сингулярен 1-цикъл: ако $\Gamma := \sum_{\ell=1}^p g_\ell \gamma^\ell \in Z_1(U, G)$, тогава

$$\mathfrak{F}(\Gamma) := \mathfrak{F}_I(\Gamma) := \bigcup_{\ell=1}^p \mathfrak{F}_I(\gamma^\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \{Z \in \mathcal{A} \mid \exists j \in I: z_j \in \Gamma_j^{\text{sp}}\}.$$

(4) I -допустима зона на точки за сингулярен 1-cycle: ако $\Gamma := \sum_{\ell=1}^p g_\ell \gamma^\ell \in Z_1(U, G)$, тогава

$$\begin{aligned} \text{Adm}(\Gamma) &:= \text{Adm}_I(\Gamma) := \mathfrak{F}_I(\Gamma)^c \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathfrak{F}_I(\Gamma)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\ell=1}^p \text{Adm}_I(\gamma^\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \begin{cases} (\mathbb{C} \setminus \Gamma_j^{\text{sp}}) \times \mathfrak{m}_j, & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \begin{cases} (\mathbb{C} \setminus \bigcup_{\ell=1}^p (\gamma^\ell)_j^{\text{sp}}) \times \mathfrak{m}_j, & \text{ако } j \in I \\ \mathcal{A}_j, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

(5) Едно подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$ ще наричаме I -допустимо за $\Gamma \in Z_1(U, G)$, ако $S \subseteq \text{Adm}_I(\Gamma)$, и I -забранено в противен случай. Симетрично, при дадено подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$, 1-цикъл $\Gamma \in Z_1(U, G)$ се нарича I -допустим (I -забранен) за S , ако S е I -допустимо (I -забранено) множество за Γ .

Дефиниция 2.1.3 (Допустимост индуцирана от ρ и φ): Нека $\Gamma \in Z_1(U, G)$, нека $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ е представяне и $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ морфизъм. Полагаме:

- (1) $\mathfrak{F}(\Gamma) := \mathfrak{F}_\rho(\Gamma) := \mathfrak{F}_{I_\rho}(\Gamma)$ или $\mathfrak{F}(\Gamma) := \mathfrak{F}_\varphi(\Gamma) := \mathfrak{F}_{I_\varphi}(\Gamma)$
- (2) $\text{Adm}(\Gamma) := \text{Adm}_\rho(\Gamma) := \text{Adm}_{I_\rho}(\Gamma)$ или $\text{Adm}(\Gamma) := \text{Adm}_\varphi(\Gamma) := \text{Adm}_{I_\varphi}(\Gamma)$.
- (3) $\mathfrak{F}_{\mathcal{A}}(\Gamma) := \mathfrak{F}_{\text{id}_{\mathcal{A}}}(\Gamma)$ и $\text{Adm}_{\mathcal{A}}(\Gamma) := \text{Adm}_{\text{id}_{\mathcal{A}}}(\Gamma)$.

Дефиниция 2.1.4 („Спектрална“ хомотопия): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ с $\pi_0(U) = 1$.

- (1) Спектрална хомотопична еквивалентност: $\gamma, \delta \in \mathcal{LU}$ се наричат спектрално хомотопични, изписано $\gamma \simeq_{\text{sp}} \delta$, ако $\forall j \in I_\rho: \gamma_j^{\text{sp}} \simeq \delta_j^{\text{sp}}$ в $\mathcal{LU}_j^{\text{sp}}$.
- (2) „Спектрална“ фундаментална група:

$$\pi_1^{\text{sp}}(U) := \pi_1(U) / \bigcap_{j \in I_\rho} \text{Ker} \left(\pi_1(U) \xrightarrow{(\chi_j)_*} \pi_1(U_j^{\text{sp}}) \right) = \mathcal{LU} / \simeq_{\text{sp}}. \quad (2.1.1)$$

Дефиниция 2.1.5 („Спектрална“ хомология): Нека $G \in \text{Ab}$.

- (1) „Спектрална“ 1-граница:

$$B_1^{\text{sp}}(U, G) := \bigcap_{j \in I_\rho} (\chi_j)_\#^{-1}(B_1(U_j^{\text{sp}}, G)) \leq B_1(U, G).$$

- (2) Първа „спектрална“ хомологична група:

$$H_1^{\text{sp}}(U, G) := Z_1(U, G) / B_1^{\text{sp}}(U, G).$$

- (3) Ако $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Z_1(U, G)$ са спектрално хомологични, ще означаваме това чрез $\Gamma_1 \approx_{\text{sp}} \Gamma_2$.

2.2. Обобщен аналитичен индекс на 1-цикъл

Дефиниция 2.2.1 (Относителен индекс): Нека $\Gamma = \sum_{\ell=1}^p g_\ell \gamma^\ell \in Z_1(U, \mathbb{Z})$.

(1) При дадено крайномерно представяне $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ и $Z_0 \in \text{Adm}_\rho(\Gamma)$, дефинираме

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Gamma, Z_0) &:= \text{Ind}_\rho(\Gamma, Z_0) := \text{Ind}_\rho^{\mathbb{Z}}(\Gamma, Z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(dZ)}{\rho(Z - Z_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^p g_\ell \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^\ell} \frac{\rho(dZ)}{\rho(Z - Z_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^p g_\ell \text{Ind}_\rho(\gamma^\ell, Z_0), \end{aligned}$$

където $\text{Ind}_\rho^{\mathbb{Z}}$ обозначава, че Γ има коефициенти в $\mathbb{Z} \in \text{Ab}$.

(2) При дадена морфизъм $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{C}}$ и $Z_0 \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma)$, дефинираме:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\varphi(\Gamma, Z_0) &:= \text{Ind}_\varphi^{\mathbb{Z}}(\Gamma, Z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(dZ)}{\varphi(Z - Z_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^p g_\ell \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^\ell} \frac{\varphi(dZ)}{\varphi(Z - Z_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^p g_\ell \text{Ind}_\varphi(\gamma^\ell, Z_0) \end{aligned}$$

(3) Също полагаме $\text{Ind}_{\mathcal{A}} := \text{Ind}_{\text{id}_{\mathcal{A}}}$ за по-кратко.

Твърдение 2.2.2 (Хомотопична инвариантност на Ind_φ): Да фиксираме $Z_0 \in \mathcal{A}$ и нека $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Z_1([Z_0]_\rho^\times, \mathbb{Z})$ с $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$. Тогава $\text{Ind}_\rho(\Gamma_1, Z_0) = \text{Ind}_\rho(\Gamma_2, Z_0)$.

Твърдение 2.2.3 (Основни свойства на Ind): Нека $\Gamma \in Z_1(U, \mathbb{Z})$ е $\mathcal{C}_{\text{pw}}^1$ -регулярен цикъл и нека $\mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$ е следващ морфизъм.

(1) Композиционен индекс като индекс на избутан цикъл:

$$\forall Z_0 \in \text{Adm}_{\psi \circ \varphi}(\Gamma): \text{Ind}_{\psi \circ \varphi}(\Gamma, Z_0) = \text{Ind}_\psi(\varphi_\# \Gamma, \varphi(Z_0)). \quad (2.2.1)$$

В частност:

$$\forall Z_0 \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma): \text{Ind}_\varphi(\Gamma, Z_0) = \text{Ind}_{\mathcal{B}}(\varphi_\# \Gamma, \varphi(Z_0)). \quad (2.2.2)$$

(2) Композиционен индекс като избутан индекс:

$$\forall Z_0 \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma): \text{Ind}_{\psi \circ \varphi}(\Gamma, Z_0) = \psi(\text{Ind}_\varphi(\Gamma, Z_0)). \quad (2.2.3)$$

В частност:

$$\forall Z_0 \in \text{Adm}_{\mathcal{A}}(\Gamma): \text{Ind}_\varphi(\Gamma, Z_0) = \varphi(\text{Ind}_{\mathcal{A}}(\Gamma, Z_0)). \quad (2.2.4)$$

В частност, ако $\Delta: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^m$ е очевидното диагонално включване, то

$$\forall Z_0 \in \text{Adm}_\Delta(\Gamma): \text{Ind}_\Delta(\Gamma, Z_0) = \text{Ind}_{\mathcal{A}}(\Gamma, Z_0)^{\times m} \in \mathcal{A}^m. \quad (2.2.5)$$

(3) Периоди на възпроизвеждащото ядро на Коши за общи морфизми:

$$\forall Z \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma): \text{Ind}_\varphi(\Gamma, Z) = \sum_{k=1}^m e_k^{\mathcal{B}} \text{ind}(\Gamma_{j(k)}^{\text{sp}}, z_{j(k)}) \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{C}^m \xrightarrow{\iota_{[m]}} \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}, \quad (2.2.6)$$

където $\{e_1^{\mathcal{B}}, \dots, e_m^{\mathcal{B}}\}$ е съответстващата система от идемпотентни елементи.

Лема-дефиниция 2.2.4: Нека $G \in \text{Ab}$ и $\Gamma = \sum_{\ell=1}^p g_\ell \gamma^\ell \in Z_1(U, G)$. Тогава

$$\forall Z_0 \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma): \text{Ind}_\rho^G(\Gamma, Z_0) := \sum_{\ell=1}^p g_\ell \text{Ind}_\rho^{\mathbb{Z}}(\gamma^\ell, Z_0) \in G^m \quad (2.2.7)$$

е добре дефиниран.

Твърдение 2.2.5: Нека $Z \in \mathcal{A}$ и $\gamma, \delta \in \mathcal{L}(\mathcal{A} \setminus [Z]_\rho)$.

(1) $\gamma \simeq \delta$ в $\pi_1(\mathcal{A} \setminus [Z]_\rho) \Rightarrow \text{Ind}_\rho(\gamma, Z) = \text{Ind}_\rho(\delta, Z)$.

(2) $\gamma \simeq_{\text{sp}} \delta$ в $\pi_1^{\text{sp}}(\mathcal{A} \setminus [Z]_\rho) \Leftrightarrow \text{Ind}_\rho(\gamma, Z) = \text{Ind}_\rho(\delta, Z)$.

Твърдение 2.2.6 (Инвариантност на Ind_ρ спрямо $\approx_{\text{sp}}$): Нека $\Gamma, \Delta \in Z_1(U, \mathbb{Z})$. $\Gamma \approx_{\text{sp}} \Delta$ тогава и само тогава, ако $\forall Z \in \tilde{U}: \text{Ind}_\rho(\Gamma, Z) = \text{Ind}_\rho(\Delta, Z)$.

2.3. Обобщени интегрални формули на Коши с индекс

Твърдение 2.3.1 (Центрирана локална интегрална формула на Коши над $\mathcal{A}$): Нека $Z_0 \in \mathcal{A}$ е точка, $r > 0$, $\Delta := \Delta_r(Z_0)$, и $f \in \mathcal{O}_\rho(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(\Delta, {}_{\mathcal{A}}M)$. Тогава имаме:

$$\forall \gamma \in \mathcal{L}(\Delta \setminus [Z_0]_\rho): \text{Ind}_\rho(\gamma, Z_0)f(Z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\rho(dZ)}{\rho(Z - Z_0)} f(Z). \quad (2.3.1)$$

Тази *локална* интегрална формула на Коши може да бъде разширена до много по-общи области в $\mathcal{A}$ чрез елементарно топологично предположение върху контура на интегриране чрез следната проста топологична конструкция:

Дефиниция 2.3.2 (Подпространствено ограничена хомотопия): Нека $(X, \mathcal{A}) \in \text{Top}_2$ и $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{L}X$. Тогава γ_0 и γ_1 се наричат *хомотопни през $\mathcal{A}$* , изписано $\gamma_0 \simeq_{\mathcal{A}} \gamma_1$, ако съществува хомотопна фамилия $(\gamma_s)_{s \in [0,1]} \subset \mathcal{L}X$ такава, че $\forall s \in (0,1): \gamma_s \in \mathcal{L}\mathcal{A}$.

Твърдение 2.3.3 (Наивна нулхомотопична интегрална формула на Коши над $\mathcal{A}$):

- (1) Точкова наивна нулхомотопична интегрална формула на Коши над $\mathcal{A}$ за общи области: нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено, $Z \in U$ точка, $f \in \mathcal{O}_\rho(U)$, и $\gamma \in \mathcal{L}(U \setminus [Z]_\rho)$. Ако $Z' \in \{Z\}$ е произволно и $\gamma \simeq_{\tilde{U} \cap [Z]_\rho^\times} Z'$, тогава

$$\text{Ind}_\rho(\gamma, Z)f(Z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W - Z)} f(W). \quad (2.3.2)$$

- (2) Локална интегрална формула на Коши над $\mathcal{A}$: нека $\Delta \subseteq \mathcal{A}$ е полидиск и $f \in \mathcal{O}_\rho(\Delta)$. Тогава:

$$\forall \gamma \in \mathcal{L}\Delta \forall Z \in \Delta \cap \text{Adm}_\rho(\gamma): \text{Ind}_\rho(\gamma, Z)f(Z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W - Z)} f(W). \quad (2.3.3)$$

Теорема 2.3.4 (Автоматично аналитично продължение към спектрални полицилиндри):

- (1) Локално автоматично аналитично продължение: ако $\Delta \subseteq \mathcal{A}$ е полидиск и $f \in \mathcal{O}_\rho(\Delta)$, тогава f допуска единznaczно ρ -холоморфно продължение до $\hat{\Delta}$ зададено чрез:

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \mathcal{L}\Delta \forall Z \in \Delta \cap \mathfrak{C}_\rho(\gamma) \forall X \in \text{nil}_\rho(\mathcal{A}): \\ \hat{f}(Z + X) := \frac{1}{2\pi i \text{Ind}_\rho(\gamma, Z)} \oint_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W - Z - X)} f(W). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

- (2) Глобално автоматично аналитично продължение: имаме естествен изоморфизъм на $\mathcal{A}$ -модули

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\rho(U) &\cong \mathcal{O}_\rho(\hat{U}) \\ f &\mapsto \hat{f}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

обратният на който е даден чрез ограничението $g \mapsto g|_U$. За даден морфизъм $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{C}}$ изоморфизъм $\mathcal{O}_\varphi(U) \cong \mathcal{O}_\varphi(\hat{U})$ е такъв на $\mathcal{B}$ -алгебри.

Теорема 2.3.5 (Спектрално нулхомологична обобщена интегрална формула на Коши): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено с $\pi_0(U) = 1$, $f \in \mathcal{O}_\rho(U)$, и $\Gamma \in Z_1(U, \mathbb{Z})$. Ако $[\Gamma] = 0$ в $H_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z})$, тогава

$$\forall Z \in U \cap \text{Adm}_\rho(\Gamma): \text{Ind}_\rho(\Gamma, Z)f(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W - Z)} f(W). \quad (2.3.6)$$

В частност,

$$\int_\Gamma \rho(dW) f(W) = 0. \quad (2.3.7)$$

Следствие 2.3.6 (Канонична форма): Нека $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C})$, $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено, и $f \in \mathcal{O}_\rho(U)$. Тогава:

- (1) Нилпотентно развитие:

$$\forall Z \in \hat{U} \forall X \in \mathfrak{m}: \hat{f}(Z + X) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\rho(X)^k}{k!} f^{(k)}(Z) \quad (2.3.8)$$

- (2) Канонична форма (разделение на спектрална и нилпотентна част):

$$\forall z \in U^{\text{sp}} \forall X \in \mathfrak{m}: f(Z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z \oplus X) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\rho(X)^k}{k!} f^{(k)}(z), \quad (2.3.9)$$

където обърнете внимание, че $f^{(k)} \circ \iota_{\mathcal{A}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U^{\text{sp}}, M)$.

Следствие 2.3.7 (Естествено билинейно сдвояване): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено.

(1) Постановка на представяне: имаме добре дефинирано $\mathbb{Z}$ - $\mathcal{A}$ -билинейно сдвояване

$$\begin{aligned} \beta: H_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z}) \times \mathcal{O}_{\rho}(U) &\rightarrow {}_{\mathcal{A}}M \\ ([\Gamma], f) &\mapsto \int_{\Gamma} \rho(dZ) f(Z). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

(2) Постановка на морфизъм: имаме добре дефинирано $\mathbb{Z}$ - $\mathcal{B}$ -билинейно сдвояване

$$\begin{aligned} \beta: H_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z}) \times \mathcal{O}_{\varphi}(U) &\rightarrow \mathcal{B} \\ ([\Gamma], f) &\mapsto \int_{\Gamma} f(Z) \varphi(dZ). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Твърдение 2.3.8 (Трансформация на Коши над $\mathcal{A}$): Нека $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C}) \in \text{LocArt}_{\mathbb{C}}$, $M \in \text{FdMod}(\mathcal{A})$ чрез $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$, и пишем както обикновено $Z = z \oplus X$ за $Z \in \mathcal{A}$. По-нататък, нека (S, Σ) е измеримо пространство, $\mu: S \rightarrow M$ крайна мярка, $\gamma := g \oplus G: S \rightarrow \mathcal{A}$ измерима функция, където съответно $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ и $G: S \rightarrow \mathfrak{m}$, и $U \subseteq \mathcal{A}$ отворено такова, че

$$\forall Z \in U: \inf_{s \in S} (|g(s) - z| - \|\rho(G(s) - X)\|_{\text{End}}) > 0 \quad (2.3.12)$$

Тогава $f: U \rightarrow M$ дефинирана чрез

$$f(Z) := \int_S (\gamma(s) - Z)^{-1} \cdot d\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S \rho(\gamma(s) - Z)^{-1} d\mu(s)$$

е ρ -аналитична върху U с производни

$$\frac{f^{(k)}(Z)}{k!} = \int_S (\gamma(s) - Z)^{-(k+1)} \cdot d\mu(s), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Твърдение 2.3.9 (Аналитичност над $\mathcal{A}$): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $f \in \mathcal{O}_{\rho}(U)$. Тогава f е ρ -аналитична в U .

Твърдение 2.3.10 (Морера над $\mathcal{A}$): Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено с $\pi_0(U) = 1$ и нека $f \in \mathcal{C}^0(U, M)$.

(1) Ако

$$\forall \gamma \in \mathcal{LU}: \oint_{\gamma} \rho(dZ) f(Z) = 0,$$

тогава $f \in \mathcal{O}_{\rho}(U)$.

(2) Ако

$$\forall \Delta \subseteq U: \oint_{\partial \Delta} \rho(dZ) f(Z) = 0,$$

тогава $f \in \mathcal{O}_{\rho}(U)$.

2.4. Обобщена интегрална формула на Коши–Помпею

В този раздел фиксираме $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathfrak{m}, \mathbb{C})$ и ще използваме стандартните отъждествявания $\mathcal{A} \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m} = \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $(z_1, \dots, z_n)^T = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)^T \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)^T$, където също така $z_1 \stackrel{\text{def}}{=} z =: x + iy$ ще е отличената спектрална координата. Нека $U \subseteq \mathcal{A}$ е отворено и $M \in \text{FdMod}(\mathcal{A})$. Тогава теорията на $\mathcal{A}$ -холоморфност позволява да обобщим класическата формула на Коши–Помпею към *многомерни изображения* $f \in \mathcal{C}^\nu(U, M)$ и компактни свързани ориентируеми $\mathcal{C}^{\nu+1}$ -повърхнини $\Sigma \subset U$ с $\mathcal{C}_{\text{pw}}^1$ -граница $\partial\Sigma$ вместо ограничени подобласти на $\mathbb{C}$, където $\nu := \min\{k \in \mathbb{N} : \mathfrak{m}^k M = 0\}$. Нека с $\chi_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ означим очевидното ограничение на характера $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Дефиниция 2.4.1 (Трансверсалност относно $\mathcal{A}$ -структурата):

- (1) Точка $W_0 \in \Sigma$ ще наричаме $\mathcal{A}$ -трансверсална, ако $W_0 \notin \partial\Sigma$ и сечението $[W_0] \cap \Sigma$ е трансверсално във W_0 .
- (2) Едно подмножество $S \subseteq \Sigma$ ще наричаме $\mathcal{A}$ -трансверсално, ако всяка точка $W_0 \in S$ е $\mathcal{A}$ -трансверсална.
- (3) Една точка $W_0 \in \Sigma$ ще наричаме нишково $\mathcal{A}$ -трансверсална, ако нейната нишка $[W_0] \cap \Sigma$ е $\mathcal{A}$ -трансверсално подмножество на Σ .
- (4) Едно подмножество $S \subseteq \Sigma$ ще наричаме листово $\mathcal{A}$ -трансверсално, ако всяка точка $W_0 \in S$ е нишково $\mathcal{A}$ -трансверсална.

Да предположим сега, че $W \in \Sigma$ е нишково $\mathcal{A}$ -трансверсална точка, където $\Sigma \pitchfork [W] =: \{p_1, \dots, p_m\}$. В частност $w := \chi_\Sigma(W) \in \mathbb{C}$ е регулярна стойност на χ_Σ и χ_Σ е локален дифеоморфизъм в точките p_ℓ , $1 \leq \ell \leq m$. Тогава всяка $p_\ell \in \Sigma$ допуска локална $\mathcal{A}$ -трансверсална околност $(S_\ell \ni p_\ell, W_\ell)$ в Σ със *спектрална* локална $\mathcal{C}^{\nu+1}$ -параметризация (сечение на χ_Σ)

$$W_\ell : S^{\text{sp}} \xrightarrow{\cong} S_\ell := W_\ell(\Omega^{\text{sp}})$$

за фиксирано отворено $S^{\text{sp}} \subseteq \mathbb{C}$ с $S^{\text{sp}} \ni w$, $1 \leq \ell \leq m$. Към това полагаме

$$\epsilon_\ell := \deg(\chi_\Sigma|_{S_\ell}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn}(\det((D\chi_\Sigma)(p_\ell))) \in \{-1, 1\}, \quad 1 \leq \ell \leq m,$$

за да отбележим дали χ_Σ запазва или обръща ориентацията върху съответния лист. За променливата $Z = z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_n a_n$ въвеждаме „допълващите променливи“ $Z_j := z_j$, $\bar{Z}_j := \bar{z}_j$, $2 \leq j \leq n$, и $\bar{Z} := \bar{z}_1 a_1 + \bar{z}_2 a_2 + \dots + \bar{z}_n a_n$. Това дава следната смяна на рамките в $\Gamma(T\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A})$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial Z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} - a_j \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - a_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad 2 \leq j \leq m.$$

Теорема 2.4.2 (Обобщена формула на Коши–Помпею над $\mathcal{A}$): Нека $W \in \{W_1, \dots, W_m\}$ е някоя от локалните листови параметризации дефинирани по-горе. Имаме $\forall w \in S^{\text{sp}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^m \epsilon_\ell f(W_\ell(w)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} \frac{dZ}{Z - W} f(Z) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=2}^n \int_{\Sigma} \frac{dZ \wedge dZ_j}{Z - W} \frac{\partial f}{\partial Z_j}(Z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\Sigma} \frac{dZ \wedge d\bar{Z}_j}{Z - W} \frac{\partial f}{\partial \bar{Z}_j}(Z). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Следствие 2.4.3: Да предположим, че $m = 1$, т.е. имаме само единичен, „глобален“ $\mathcal{A}$ -трансверсален лист (S, W) , и без ограничение на общността, че χ_Σ запазва ориентацията върху S .

- (1) Ако допълнително $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U, M)$, тогава $\forall W \in S$:

$$\begin{aligned} f(W) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} \frac{dZ}{Z - W} f(Z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=2}^n \int_{\Sigma} \frac{dZ \wedge dZ_j}{Z - W} \frac{\partial f}{\partial Z_j}(Z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} \frac{dZ}{Z - W} f(Z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=2}^n \int_{\Sigma} \frac{dZ \wedge dz_j}{Z - W} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(Z) - a_j \frac{\partial f}{\partial z}(Z) \right). \end{aligned}$$

- (2) Ако допълнително $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U, M)$ и Σ е затворена, тогава $\forall W \in S$:

$$f(W) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=2}^n \int_{\Sigma} \frac{dZ \wedge dz_j}{Z - W} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(Z) - a_j \frac{\partial f}{\partial z}(Z) \right).$$

3. Научни приноси на дисертацията

Доказани са обобщения на основните резултати на теорията на *холоморфните* функции в равнината (със стойности в крайномерни комплексни векторни пространства V), където полето $\mathbb{C}$ се заменя от крайномерна комутативна асоциативна унитарна $\mathbb{K}$ -алгебра $\mathcal{A}$ за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V е заменено от крайнопороден $\mathcal{A}$ -модул ${}_A M$. Специално внимание е обърнато на това, кои резултати всъщност не изискват комплексна структура, а само частични свойства на $\mathbb{C}$, респективно $\mathcal{A}$, като напр. само комутативност, и за кои резултати наличието на комплексна структура е строго необходимо и по какви причини, напр. свързаност на групата $\mathbb{C}^\times$. Там, където вече съществуват такива частични обобщения в литературата, нашите резултати са не само по-обща, но и често много по-силни и дори в определен тесен смисъл максимално възможните в съответните частни случаи, отчасти благодарение на въвеждането на *спектрален подход* в теорията.

По-точно:

- Въведени и изследвани са *относителни* понятия за диференцируемост спрямо крайномерно представяне $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ на $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$ или морфизъм $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ в $\text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$, като особено внимание е отделено на случая на ниска регулярност (т.е. диференцируемост без непрекъснатост на производната по аналогия на холоморфните функции) за $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. В частност е въведен и изследван средния сноп / клас на регулярност $\mathcal{F}_{\rho}^{\text{str}}$, който има по-добро поведение от по-стандартните дефиниции за ключови категорни конструкции.
- Изследвано е взаимодействието на аналитичната страна с някои основни алгебрични и категорно-теоретични конструкции. Например, доказана е натуралност на съответните структурни снопове спрямо вътрешни и външни директни произведения на представяния.
- Като продължение на предишната точка, изведени са редица основни факторизации и автоматични продължения на ρ -диференцируеми функции и е доказана тяхната *стандартна факторизация* в общия случай, което в частност показва, че за аналитичните цели е достатъчно да се разглеждат само инективни неразлагаеми представяния на локални Артинови $\mathbb{K}$ -алгебри.
- Дори за частния случай ${}_A M = \mathcal{A}$ е дадено *директно, чисто аналитично/топологично* доказателство на основния факт, че $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ -регулярните функции са непрекъснати и Фреше диференцируеми, вместо *алгебричния подход* на [Wat92a].
- Доказана е много по-силна форма на първата основна теорема в [GM96] за една $\mathcal{A}$ -променлива (но за стойности в модул).
- Изведени са обобщени оператори на Виртингер, универсални за всички $\mathcal{A} \in \text{FdCAlg}_{\mathbb{K}}$.
- Доказана е обобщена теорема на Коши–Гурса за ρ -диференцируеми функции. Доказана е безкрайната интегрируемост на ρ -диференцируеми функции за широк клас от области.
- Въведена е *спектралната гледна точка* като метод за извличане на максимално силни резултати, както в реалната, така (и най-вече) в комплексната теория.
- Въведени са основните алгебро-топологични инварианти на комплексната теория.
- Дадена е **пълна характеристика** на аналога на аналитичния индекс на крива в комплексната равнина, значително подобрявайки частичните резултати на [Riz52a; Riz52b], [Ede73; Ede76b] и [Shp15].
- Изведени са градиращи по сила обобщени интегрални формули на Коши, вкл. хомотопична такава за общи области. Доказана е максимално хомологично обобщение на интегралната формула на Коши при много по-слаби топологични допускания, давайки значително по-силен резултат от известния до момента в [Riz52a; Riz52b].
- Доказани са силни $\mathcal{A}$ -аналози на стандартните следствия от интегралната формула на Коши, вкл. ρ -аналитичност.
- Доказано е *канонично* $\mathcal{A}$ -холоморфно продължение на $\mathcal{A}$ -холоморфните функции и е изведена пълна характеристика на областите на $\mathcal{A}$ -холоморфност.
- Формулирана и доказана е трансформация на Коши над $\mathcal{A}$.
- Изведена е обобщена теорема на Коши–Помпею за компактни ориентируеми повърхнини $\Sigma \subset \mathcal{A}$ в обща позиция спрямо радикала. Приложена в частност към холоморфни изображения (в стандартния смисъл), тя в частност дава за тях своеобразна нискоразмерна формула на Бохнер–Мартинели над Σ с ненулев повърхнинен интегрален член, но затова пък с *холоморфни ядра* както в граничния интегрален член, така и в повърхнинения.

и др.

Публикациите на автора свързани с дисертацията са упоменати в библиографията на следващата страница.

Част от резултатите в настоящата дисертация са били представени също така и в следните доклади на автора:

- Доклад на тема „Functions holomorphic over finite-dimensional commutative associative unital algebras“, изнесен на международната конференция „Trends in Combinatorial Ring Theory“, София (септември 2021);
- Доклад на тема „Functions holomorphic over finite-dimensional commutative associative unital algebras“, изнесен на международната конференция „Second Annual Meeting of Young Bulgarian Mathematicians“, София (юни 2022);
- Доклад на тема „Functions Holomorphic over Finite-Dimensional Commutative Associative Unital Algebras“, изнесен на общия еминар на секция „Анализ, геометрия и топология“ на ИМИ-БАН (юни 2023);
- Доклад на тема „Functions Holomorphic over Finite-Dimensional Commutative Associative Unital Algebras“, изнесен на международната конференция „Mathematics Days in Sofia“ (юли 2023);
- Доклад на тема „Some Aspects of Meromorphy over Finite-Dimensional Commutative Algebras“, изнесен на отчетната сесия на секция „Алгебра и логика“ на ИМИ-БАН (декември 2023);
- Доклад на тема „A Cauchy–Pompeiu Formula over Finite-Dimensional Commutative Complex Algebras“, изнесен на отчетната сесия на секция „Алгебра и логика“ на ИМИ-БАН (декември 2024).

Библиография¹

Публикации на автора свързани с дисертацията

- [Gen24] M. Genov, “Holomorphy over finite-dimensional commutative associative $\mathbb{C}$ -algebras: local theory”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 77.5 (2024), с. 646–656, DOI: [10.7546/CRABS.2024.05.02](https://doi.org/10.7546/CRABS.2024.05.02) (цит. на с. 6).
- [Gen26] M. Genov, “The Generalized Homological Cauchy Integral Formula for A -Holomorphic Functions” (2026), to appear in *Serdica Math. J.* (цит. на с. 9).

Алгебрични аспекти

- [Poo08a] B. Poonen, “The moduli space of commutative algebras of finite rank”, *J. Eur. Math. Soc.* 10.3 (2008), с. 817–836, DOI: [10.4171/JEMS/131](https://doi.org/10.4171/JEMS/131) (цит. на с. 10).
- [Poo08b] B. Poonen, “Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field”, в: *Contemporary Mathematics, Computational Arithmetic Geometry*, т. 463, Amer. Math. Soc., 2008, с. 111–120, URL: <http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/dimension6.pdf> (цит. на с. 10).
- [ST03] D. Suprunenko и R. I. Tyškevič, *Commutative Matrices*, Russian, 2-е изд., URSS, 2003 (цит. на с. 10).
- [ST68] D. Suprunenko и R. I. Tyškevič, *Commutative Matrices*, English transl., Academic Press, 1968 (цит. на с. 10).
- [Sup56] D. Suprunenko, “On Maximal Commutative Subalgebras of the Full Linear Algebra”, Russian, *Uspekhi Mat. Nauk* 11 (1956), с. 181–184, URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/rm7807> (цит. на с. 10).

Комплексен анализ (разнообразни)

- [Hur32] A. Hurwitz, “Über die Entwicklung der Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit”, German, в: *Mathematische Werke, Erster Band Funktionentheorie*, 1932, с. 461–480, DOI: [10.1007/978-3-0348-4161-0_26](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4161-0_26) (цит. на с. 1).

Класическа и класическа аналитична геометрия над алгебри

- [Ben73] W. Benz, *Vorlesungen Über Geometrie der Algebren*. German, т. 197, Grundlehren Math. Wiss. Springer, Cham, 1973 (цит. на с. 3).
- [Cer17] C. Cerroni, “From the theory of “congeneric surd equations” to “Segre’s bicomplex numbers””, *Hist. Math.* 44.3 (2017), с. 232–251, DOI: [10.1016/j.hm.2017.03.001](https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.03.001) (цит. на с. 3).
- [Grü06] J. Grünwald, “Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie.”, German, *Monatsh. Math. Phys.* 17 (1906), с. 81–136, DOI: [10.1007/BF01697639](https://doi.org/10.1007/BF01697639) (цит. на с. 3).
- [HH04] A. A. Harkin и J. B. Harkin, “The Geometry of Generalized Complex Numbers”, *Mathematics Magazine* 77.2 (2004), с. 118–129, DOI: [10.1080/0025570X.2004.11953236](https://doi.org/10.1080/0025570X.2004.11953236) (цит. на с. 3).
- [Stu03] E. Study, *Geometrie der Dynamen*. German, Leipzig: B. G. Teubner. XIII u. 608 S. gr. 8° (1901-03) (1903). 1903 (цит. на с. 3).
- [Tak40a] T. Takasu, “Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien”, German, *Proc. Imp. Acad. Japan* 16 (1940), с. 333–340, DOI: [10.3792/pia/1195579018](https://doi.org/10.3792/pia/1195579018) (цит. на с. 3).
- [Tak40b] T. Takasu, “Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien”, German, *Proc. Imp. Acad. Japan* 16 (1940), с. 346–349, DOI: [10.3792/pia/1195579020](https://doi.org/10.3792/pia/1195579020) (цит. на с. 3).
- [Tak40c] T. Takasu, “Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien”, German, *Proc. Imp. Acad. Japan* 16 (1940), с. 341–345, DOI: [10.3792/pia/1195579019](https://doi.org/10.3792/pia/1195579019) (цит. на с. 3).

¹съдържа 137 цитирани заглавия (вкл. статии на автора);

- [Tak41a] T. Takasu, “Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien. II”, German, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 17 (1941), с. 330–338, DOI: [10.3792/pia/1195578674](https://doi.org/10.3792/pia/1195578674) (цит. на с. 3).
- [Tak41b] T. Takasu, “Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien. II”, German, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 17 (1941), с. 339–343, DOI: [10.3792/pia/1195578675](https://doi.org/10.3792/pia/1195578675) (цит. на с. 3).
- [Tak41c] T. Takasu, “Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien. II”, German, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 17 (1941), с. 344–348, DOI: [10.3792/pia/1195578676](https://doi.org/10.3792/pia/1195578676) (цит. на с. 3).
- [Yag66] I. M. Yaglom, *Complex numbers in geometry*, New York-London: Academic Press. 206 p. (1966). 1966 (цит. на с. 3).
- [Yag79] I. M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*, Heidelberg Science Library. New York: Springer-Verlag New York Inc. xviii, 307 pp., 227 figs. 1979 (цит. на с. 3).

Ниско-размерен и специален комутативен $\mathcal{A}$ -анализ

- [Alp+13] D. Alpay, M. E. Luna-Elizarrarás, M. Shapiro и D. C. Struppa, *Basics of Functional Analysis with Bicomplex Scalars and Bicomplex Schur Analysis*, Springer, 2013, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05110-9>, URL: <https://arxiv.org/abs/1304.0781> (цит. на с. 3).
- [BR73] L. Bassotti и G. B. Rizza, “Funzioni monogene nelle algebre reali di dimensione due e applicazioni conformi”, Italian, *Rend. Mat.*, VI 6 (1973), с. 381–397 (цит. на с. 3).
- [Di +23] A. Di Teodoro, E. Morillo, D. R. Ochoa-Tocachi, J. Palacios и E. Vela, “A family of fractional analytic polynomials in generalized complex numbers” (2023), preprint, DOI: [10.21203/rs.3.rs-3089175/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3089175/v1) (цит. на с. 3).
- [GGM02] P. M. Gadea, J. Grifone и J. Masqué, “Manifolds modelled over free modules over the double numbers”, *Acta Math. Hung.* 100.3 (2002), с. 187–203, DOI: [10.1023/A:1025037325005](https://doi.org/10.1023/A:1025037325005) (цит. на с. 4).
- [Hor63] J. Horváth, *A generalization of the Cauchy-Riemann equations*, *Contrib. Differ. Equations* 1, 39–58 (1963). 1963 (цит. на с. 3).
- [KS05] A. Khrennikov и G. Segre, “An Introduction to Hyperbolic Analysis” (2005), URL: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053> (цит. на с. 3).
- [Lun+15] M. E. Luna-Elizarrarás, M. Shapiro, D. C. Struppa и A. Vajiac, *Bicomplex Holomorphic Functions*, Birkhäuser Cham, 2015, DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-24868-4> (цит. на с. 3).
- [MR98] A. E. Motter и M. A. F. Rosa, “Hyperbolic Calculus”, *Adv. Appl. Clifford Algebras* 8.1 (1998), с. 109–128, DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03041929> (цит. на с. 3).
- [NT55] H. Nisigaki и T. Takasu, “General Three-Dimensional Complex Function Theory I”, *Yokohama Math. J.*, D 3 (1955), с. 53–126, URL: https://ynu.repo.nii.ac.jp/?action=repository_action_common_download&item_id=6397&item_no=1&attribute_id=20&file_no=1 (цит. на с. 3).
- [NT56] H. Nisigaki и T. Takasu, “General Three-Dimensional Complex Function Theory II”, *Yokohama Math. J.*, D 4 (1956), с. 147–226, URL: https://ynu.repo.nii.ac.jp/record/6407/files/YMJ_04_1956_147-226.pdf (цит. на с. 3).
- [Ola02] S. Olario, *Complex Numbers in N Dimensions*, North-Holland, 2002 (цит. на с. 3).
- [Pri91] G. B. Price, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, Marcel Dekker, Inc., 1991 (цит. на с. 3).
- [Ril53] J. D. Riley, “Contributions to the Theory of Functions of a Bicomplex Variable”, *Tôhoku Math. J. (2)* 5 (1953), с. 132–165, DOI: [10.2748/tmj/1178245302](https://doi.org/10.2748/tmj/1178245302), URL: <https://projecteuclid.org/journals/tohoku-mathematical-journal/volume-5/issue-2/Contributions-to-the-theory-of-functions-of-a-bicomplex-variable/10.2748/tmj/1178245302.pdf> (цит. на с. 3).
- [Rön08] S. Rönn, “Bicomplex Algebra and Function Theory” (2008), URL: <https://arxiv.org/abs/math/0101200> (цит. на с. 3).
- [RS04] D. Rochon и M. Shapiro, “On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers”, *An. Univ. Oradea, Fasc. Mat.* 11 (2004), с. 71–110 (цит. на с. 3).

Теми в ниско-размерния комутативен $\mathcal{A}$ -анализ

- [Col+11] F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa, A. Vajiac и M. Vajiac, “Bicomplex hyperfunctions”, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 190.2 (2011), с. 247–261, DOI: [10.1007/s10231-010-0148-z](https://doi.org/10.1007/s10231-010-0148-z) (цит. на с. 3).
- [Mat22] Y. Matsui, “Sheaf theoretical study of bicomplex hyperfunctions”, *Proceedings of RIMS Kôkyûroku* 2302 (2022), с. 67–73, URL: <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2302-08.pdf> (цит. на с. 3).
- [Mat25] Y. Matsui, “Bicomplex Hyperfunctions and Bicomplex Microfunctions”, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 61.4 (2025), с. 787–803, DOI: [10.4171/prims/61-4-5](https://doi.org/10.4171/prims/61-4-5), URL: <https://ems.press/content/serial-article-files/51748> (цит. на с. 3).
- [MS20] Y. Matsui и Y. Sato, “Characterization theorems of Riley type for bicomplex holomorphic functions”, *Commun. Korean Math. Soc.* 35.3 (2020), с. 825–841, DOI: [10.4134/CKMS.c190323](https://doi.org/10.4134/CKMS.c190323) (цит. на с. 3).
- [MS21] Y. Matsui и Y. Sato, “Generalized self-inversive bicomplex polynomials with respect to the j -conjugation”, *Bull. Korean Math. Soc.* 58.4 (2021), с. 885–895, DOI: [10.4134/BKMS.b200601](https://doi.org/10.4134/BKMS.b200601) (цит. на с. 3).
- [VV12] A. Vajiac и M. B. Vajiac, “Multicomplex hyperfunctions”, *Complex Var. Elliptic Eq.* 57.7-8 (2012), с. 751–762, DOI: [10.1080/17476933.2011.603419](https://doi.org/10.1080/17476933.2011.603419) (цит. на с. 3).

Крайномерен комутативен реален $\mathcal{A}$ -анализ

- [Fox49] G. E. N. Fox, *The elementary function theory of a hypercomplex variable*, 1949, DOI: [10.14288/1.0080632](https://doi.org/10.14288/1.0080632), URL: <https://open.library.ubc.ca/soa/cIRcle/collections/ubctheses/831/items/1.0080632> (цит. на с. 3).
- [GM96] P. Gadea и J. Masqué, “A-Differentiability and A-Analyticity”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124.5 (1996), с. 1437–1443, URL: <http://www.ams.org/journals/proc/1996-124-05/S0002-9939-96-03070-5/> (цит. на с. 3, 8, 32).
- [Ped92] P. Pedersen, *Cauchy’s Integral Theorem on a Commutative Algebra*, техн. докл. LA-UR-92-1264, New Mexico 87545: Los Alamos National Laboratory, 1992 (цит. на с. 3).
- [Sny90] H. H. Snyder, “A theorem of Cauchy-Pompeiu type on finite-dimensional associative algebras”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 2-я пор. 39.1 (1990), с. 153–168, DOI: [10.1007/BF02862882](https://doi.org/10.1007/BF02862882) (цит. на с. 10).
- [War53] J. Ward, “From generalized Cauchy-Riemann equations to linear algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4.3 (1953), с. 456–461, DOI: [10.2307/2032151](https://doi.org/10.2307/2032151) (цит. на с. 10).
- [Wat92a] W. C. Waterhouse, “Analyzing some generalized analytic functions”, *Expo. Math.* 10.2 (1992), с. 183–192 (цит. на с. 3, 5, 7, 8, 32).
- [Wil82] R. W. Wilkerson, “Linear maps of holomorphic functions on commutative algebras”, *Commun. Algebra* 10.2 (1982), с. 121–134, DOI: [10.1080/00927878208822707](https://doi.org/10.1080/00927878208822707) (цит. на с. 2).

Крайномерен комутативен комплексен $\mathcal{A}$ -анализ

- [Ede73] J. Edenhofer, “Analytische Funktionen auf Algebren”, German, докт. ... дис., TU München, 1973 (цит. на с. 3, 32).
- [Ede76b] J. Edenhofer, “Cauchysche Integralformeln Analytischer Funktionen auf Algebren”, German, *Acta Math. Acad. Scient. Hung.* 28 (3 1976), с. 285–292, DOI: [10.1007/BF01896792](https://doi.org/10.1007/BF01896792) (цит. на с. 3, 9, 32).
- [Goo88] I. J. Good, “A simple generalization of analytic function theory”, *Expo. Math.* 6.4 (1988), с. 289–311 (цит. на с. 3).
- [Ket28a] P. Ketchum, “Analytic functions of hypercomplex variables”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 30 (1928), с. 641–667, DOI: [10.1090/S0002-9947-1928-1501452-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1928-1501452-7) (цит. на с. 3).
- [Mib60] Y. Mibu, “On the theory of regular functions in Banach algebras”, *Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto*, A 33.2 (1960), с. 323–340, URL: [10.1215/kjm/1250775918](https://doi.org/10.1215/kjm/1250775918) (цит. на с. 7).
- [Pog07] A. A. Pogorui, “Hyperholomorphic functions on commutative algebras”, *Complex Var. Elliptic Eq.* 52.12 (2007), с. 1155–1159, DOI: [10.1080/17476930701609437](https://doi.org/10.1080/17476930701609437) (цит. на с. 3).

- [Riz52a] G. B. Rizza, “Contributi al problema della determinazione di una formula integrale per le funzioni monogene nelle algebre dotate di modulo e commutative”, Italian, *Rend. Mat. Appl.*, V 11 (1952), с. 134–155 (цит. на с. 3, 9, 32).
- [Riz52b] G. B. Rizza, “Estensione della formula integrale di Cauchy alle algebre complesse dotate di modulo e commutative”, Italian, *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* 12 (1952), с. 667–669 (цит. на с. 3, 9, 32).
- [Riz54] G. B. Rizza, “Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative”, Italian, *Rend. Mat. Appl.*, V 12 (1954), с. 299–331 (цит. на с. 3).
- [Sch93a] G. Scheffers, “Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funktionen”, *Sitzungsber. Säch. Gesellsch. Wiss. Math.-Phys. Kl.* 45 (1893), с. 328–342 (цит. на с. 1, 25).
- [Sch93b] G. Scheffers, “Theorems on Analytic Functions in n Dimensions”, French, *C. R. Acad. Sci., Paris* 116 (1893), с. 1242–1244 (цит. на с. 1).
- [Shp15] V. S. Shpakivskiy, “Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras”, *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.* 12.4 (2015), с. 313–328, URL: <https://arxiv.org/abs/1503.07162v1> (цит. на с. 3, 9, 32).

Крайномерен некомутативен $\mathcal{A}$ -анализ (подход чрез диференциални оператори)

- [DKM01] R. Delanghe, R. S. Kraußhar и H. R. Malonek, “Differentiability of functions with values in some real associative algebras”, *Bull. Soc. R. Sci. Liège* 70.4-6 (2001), с. 231–249, URL: <http://popups.ulg.ac.be/0037-9565/index.php?id=1870> (цит. на с. 2).
- [Hab76] K. Habetha, “Eine Bemerkung zur Funktionentheorie in Algebren”, German, в: *Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations* (Darmstadt, Germany, 12–15 амп. 1976), 1976, с. 502–509, DOI: [10.1007/BFb0087661](https://doi.org/10.1007/BFb0087661) (цит. на с. 3).
- [Kra03] Y. Krasnov, “Commutative algebras in Clifford analysis”, в: *Progress in analysis. Vol. I, II. Proceedings of the 3rd international congress of the International Society for Analysis, its Applications and Computation (ISAAC), Berlin, Germany, August 20–25, 2001*. River Edge, NJ: World Scientific, 2003, с. 349–359 (цит. на с. 2).
- [Kri52] A. Kriszten, “Hyperkomplexe und pseudo-analytische Funktionen”, German, *Comment. Math. Helv.* 26 (1952), с. 6–35, DOI: [10.1007/BF02564288](https://doi.org/10.1007/BF02564288), URL: <https://eudml.org/doc/139032> (цит. на с. 2).
- [Ros00] B. Rosenfeld, “Differentiable functions in associative and alternative algebras and smooth surfaces in projective spaces over these algebras”, *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* 68.82 (2000), с. 67–71, URL: <https://eudml.org/doc/258138> (цит. на с. 2).
- [War40] J. Ward, “A theory of analytic functions in linear associative algebras”, *Duke Math. J.* 7 (1940), с. 233–248, DOI: [10.1215/S0012-7094-40-00714-1](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00714-1) (цит. на с. 2).

Некомутативен $\mathcal{A}$ -анализ (Методи от Банаховите алгебри и некомутативни сходящи редове)

- [AC55] R. Arens и A. P. Calderón, “Analytic functions of several Banach algebra elements”, *Ann. Math.*, 2-я пор. 62 (1955), с. 204–216, DOI: [10.2307/1969675](https://doi.org/10.2307/1969675) (цит. на с. 2).
- [Bru58] N. G. de Bruijn, “Function theory in Banach algebras”, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A I 250.5 (1958), с. 3–13, URL: <https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/4286362/597516.pdf> (цит. на с. 2).
- [Bru59] N. G. de Bruijn, “Verallgemeinerte Riemannsche Sphären”, German, *Nachr. Akad. Wiss. Gött. II. Math.-Phys. Kl.* 11 (1959), с. 279–292, URL: <https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/2922174/597521.pdf> (цит. на с. 2).
- [CH66] C. G. Cullen и C. A. Hall, “Classes of functions on algebras”, *Can. J. Math.* 18 (1966), с. 139–146, DOI: [10.4153/CJM-1966-018-2](https://doi.org/10.4153/CJM-1966-018-2) (цит. на с. 2).
- [CH67] C. G. Cullen и C. A. Hall, “Functions on semi-simple algebras”, *Am. Math. Mon.* 74.1P1 (1967), с. 14–19, DOI: [10.2307/2314045](https://doi.org/10.2307/2314045) (цит. на с. 2).
- [Den67] P. Dentoni, “Sulle funzioni monogene nelle algebre non commutative”, Italian, *Rend. Mat. Appl.* 26.5 (1967), с. 403–421 (цит. на с. 2).

- [Den70] P. Dentoni, “Applicazioni monogene tra spazi di Banach”, Italian, *Atti Accad. Naz. Lincei*, VIII 48 (1970), с. 572–575 (цит. на с. 2).
- [Den71] P. Dentoni, “Sulla monogeneità negli spazi di Banach”, Italian, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4-я пор. 88 (1971), с. 33–50, DOI: [10.1007/BF02415058](https://doi.org/10.1007/BF02415058) (цит. на с. 2).
- [Die30] P. Dienes, “The Exponential Function in Linear Algebras”, *Q. J. Math., Oxf. Ser. 1* (1930), с. 300–309, DOI: [10.1093/qmath/os-1.1.300](https://doi.org/10.1093/qmath/os-1.1.300) (цит. на с. 2).
- [Rin55] R. F. Rinehart, “The equivalence of definitions of a matrix function”, *Am. Math. Mon.* 62.6 (1955), с. 395–414, DOI: [10.2307/2306996](https://doi.org/10.2307/2306996) (цит. на с. 2).
- [Rin57] R. F. Rinehart, “Extension of the Derivative Concept for Functions of Matrices”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 8.2 (1957), с. 329–335, DOI: [10.1090/S0002-9939-1957-0084564-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1957-0084564-0) (цит. на с. 2).
- [Rin60] R. F. Rinehart, “Elements of a theory of intrinsic functions on algebras”, *Duke Math. J.* 27 (1960), с. 1–19, DOI: [10.1215/S0012-7094-60-02701-0](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-60-02701-0) (цит. на с. 2).
- [Rin61] R. F. Rinehart, “Intrinsic functions on matrices”, *Duke Math. J.* 28 (1961), с. 291–300, DOI: [10.1215/S0012-7094-61-02827-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-61-02827-7) (цит. на с. 2).
- [RW62] R. F. Rinehart и J. C. Wilson, “Two types of differentiability of functions on algebras”, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 2-я пор. 11 (1962), с. 204–216, DOI: [10.1007/BF02843955](https://doi.org/10.1007/BF02843955) (цит. на с. 2).
- [RW64] R. F. Rinehart и J. C. Wilson, “Functions on algebras under homomorphic mappings”, *Duke Math. J.* 31 (1964), с. 221–227, DOI: [10.1215/S0012-7094-64-03119-9](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03119-9) (цит. на с. 2).
- [Sch31] L. Schlesinger, “Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen”, German, *Math. Z.* 33.1 (1931), с. 33–61, DOI: [10.1007/BF01174342](https://doi.org/10.1007/BF01174342) (цит. на с. 2).
- [Sti87] E. Stickel, “On the Frechet Derivative of Matrix Functions”, *Linear Algebra and its Applications* 91 (1987), с. 83–88, DOI: [10.1016/0024-3795\(87\)90062-0](https://doi.org/10.1016/0024-3795(87)90062-0) (цит. на с. 2).
- [Sze78] G. Szekeres, “Infinite values of meromorphic matrix functions”, *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 81.1 (1978), с. 287–295, DOI: [10.1016/S1385-7258\(78\)80019-5](https://doi.org/10.1016/S1385-7258(78)80019-5) (цит. на с. 2).
- [Wag42] R. W. Wagner, “Differentials and analytic continuation in non-commutative algebras”, *Duke Math. J.* 9.4 (1942), с. 677–691, DOI: [10.1215/S0012-7094-42-00947-5](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-42-00947-5) (цит. на с. 2).

Крайномерен неасоциативен $\mathcal{A}$ -анализ

- [BK14] Z. Balanov и Y. Krasnov, “Complex structures in algebra, topology and differential equations”, *Georgian Math. J.* 21.3 (2014), с. 249–260, DOI: [10.1515/gmj-2014-0037](https://doi.org/10.1515/gmj-2014-0037) (цит. на с. 10).
- [BKK03] Z. Balanov, Y. Krasnov и W. Krawcewicz, “Complex structures in algebras and bounded solutions to quadratic ODE’s”, *Funct. Differ. Eq.* 10.1-2 (2003), с. 65–81 (цит. на с. 10).
- [KM14] Y. Krasnov и I. Messika, “Differential and integral equations in algebra”, *Funct. Differ. Eq.* 21.3-4 (2014), с. 137–146 (цит. на с. 10).
- [Kra07] Y. Krasnov, “Analytic function theory in algebras”, *Georgian Math. J.* 14.3 (2007), с. 471–481 (цит. на с. 2, 10).
- [Kra09] Y. Krasnov, “Differential equations in algebras”, в: *Hypercomplex analysis. Selected papers of the 6th ISAAC conference, Ankara, Turkey, August 13-18, 2007*, Basel: Birkhäuser, 2009, с. 187–205, DOI: [10.1007/978-3-7643-9893-4_12](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9893-4_12) (цит. на с. 10).
- [Kra13] Y. Krasnov, “Properties of ODEs and PDEs in algebras”, *Complex Anal. Oper. Theory* 7.3 (2013), с. 623–634, DOI: [10.1007/s11785-012-0247-5](https://doi.org/10.1007/s11785-012-0247-5) (цит. на с. 10).
- [KT18] Y. Krasnov и V. G. Tkachev, “Idempotent geometry in generic algebras”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 28.5 (2018), с. 14, DOI: [10.1007/s00006-018-0902-7](https://doi.org/10.1007/s00006-018-0902-7) (цит. на с. 10).

$\mathcal{A}$ -многообразия по отношение на ниско-размерни $\mathcal{A}$

- [BC74] F. Brickell и R. S. Clark, “Integrable almost tangent structures”, *J. Differ. Geom.* 9 (1974), с. 557–563, DOI: [10.4310/jdg/1214432553](https://doi.org/10.4310/jdg/1214432553) (цит. на с. 4).
- [CFG96] V. Cruceano, P. Fortuny и P. Gadea, “A survey on paracomplex geometry”, *Rocky Mountain J. Math.* 26.1 (1996), с. 83–115, DOI: [10.1216/rmj/1181072105](https://doi.org/10.1216/rmj/1181072105) (цит. на с. 4).
- [GGM02] P. M. Gadea, J. Grifone и J. Masqué, “Manifolds modelled over free modules over the double numbers”, *Acta Math. Hung.* 100.3 (2002), с. 187–203, DOI: [10.1023/A:1025037325005](https://doi.org/10.1023/A:1025037325005) (цит. на с. 4).

- [GGM03] P. M. Gadea, J. Grifone и J. Masqué, “Stein embedding theorem for B-manifolds”, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, II 46.2 (2003), с. 489–499, DOI: [10.1017/S0013091502000597](https://doi.org/10.1017/S0013091502000597) (цит. на с. 4).

Общи крайномерни реални $\mathcal{A}$ -многообразия

- [CM20] N. Combe и Y. Manin, “ F -manifolds and geometry of information”, *Bull. Lond. Math. Soc.* 52.5 (2020), с. 777–792, DOI: [10.1112/blms.12411](https://doi.org/10.1112/blms.12411) (цит. на с. 4).
- [CM22] N. Combe и Y. Manin, “Genus zero modular operad and absolute Galois group”, *North-West. Eur. J. Math.* 8 (2022), с. 25–60, ISSN: 2496-5170, URL: <https://nwejm.univ-lille.fr/index.php/nwejm/article/view/9/8> (цит. на с. 4).
- [MS22] M. Malakhaltsev и C. Segovia, “Frobenius manifolds in the context of A -manifolds”, *Lobachevskii J. Math.* 43.1 (2022), с. 127–140, ISSN: 1995-0802, DOI: [10.1134/S1995080222040163](https://doi.org/10.1134/S1995080222040163) (цит. на с. 4).
- [Sal23] A. Salimov, *Applications of Holomorphic Functions in Geometry*, Birkhäuser, 2023 (цит. на с. 4, 11).
- [Shu02] V. V. Shurygin, “Smooth Manifolds Over Local Algebras and Weil Bundles”, *J. Math. Sci.* 108.2 (2002), с. 249–294, DOI: [10.1023/A:1012848404391](https://doi.org/10.1023/A:1012848404391) (цит. на с. 4).
- [Shu99] V. V. Shurygin, “The Structure of Smooth Mappings over Weil Algebras and the Category of Manifolds over Algebras”, *Lobachevskii J. Math.* 5 (1999), с. 29–55, URL: <https://www.mathnet.ru/eng/ljm146> (цит. на с. 5, 6).
- [VSS85] V. V. Vishnevskii, A. P. Shirokov и V. V. Shurygin, *Spaces over Algebras*, Russian, Kazan State Univ., 1985 (цит. на с. 4).

Общи крайномерни реални $\mathcal{A}$ -многообразия (функтори на Вейл)

- [KM03] M. Kureš и W. M. Mikulski, “Liftings of linear vector fields to product preserving gauge bundle functors on vector bundles”, *Lobachevskii J. Math.* 12 (2003), с. 51–61, URL: <https://eudml.org/doc/230453> (цит. на с. 5).
- [KMS93] I. Kolář, P. Michor и J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, 1993, DOI: [10.1007/978-3-662-02950-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-02950-3) (цит. на с. 4).
- [Kur06] M. Kureš, “Weil modules and gauge bundles”, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.* 22.1 (2006), с. 271–278, DOI: [10.1007/s10114-005-0616-3](https://doi.org/10.1007/s10114-005-0616-3) (цит. на с. 5).
- [Mik01] W. M. Mikulski, “Product preserving gauge bundle functors on vector bundles”, *Colloq. Math.* 90.2 (2001), с. 277–285, DOI: [10.4064/cm90-2-7](https://doi.org/10.4064/cm90-2-7) (цит. на с. 5).

Кохомологични теории за $\mathcal{A}$ -многообразия

- [Mal08] M. A. Malakhaltsev, “De Rham like cohomology of geometric structures”, в: *Differential geometry and its applications. Proceedings of the 10th international conference on differential geometry and its applications, DGA 2007, Olomouc, Czech Republic, August 27–31, 2007*, Hackensack, NJ: World Scientific, 2008, с. 501–513 (цит. на с. 10).
- [Mal90] M. A. Malakhaltsev, “An analog of Dolbeault cohomologies for manifolds over the algebra of dual numbers”, Russian, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.* 1990.11 (342) (1990), с. 82–84 (цит. на с. 10).
- [Mal99] M. A. Malakhaltsev, “The Lie derivative and cohomology of G -structures”, *Lobachevskii J. Math.* 3 (1999), с. 197–200, URL: <https://eudml.org/doc/231646> (цит. на с. 10).
- [MS16] A. A. Malyugina и V. V. Shurygin, “Complexes of differential forms associated with a normalized manifold over the algebra of dual numbers”, *Lobachevskii J. Math.* 37.1 (2016), с. 66–74, DOI: [10.1134/S1995080216010066](https://doi.org/10.1134/S1995080216010066) (цит. на с. 10).
- [Shu96] V. V. Shurygin, “On the cohomology of manifolds over local algebras”, *Russ. Math.* 40.9 (1996), с. 67–81 (цит. на с. 10).
- [SS01] V. V. Shurygin и L. B. Smolyakova, “An analog of the Vaisman-Molino cohomology for manifolds modelled on some types of modules over Weil algebras and its application”, *Lobachevskii J. Math.* 9 (2001), с. 55–75, ISSN: 1995-0802, URL: <https://eudml.org/doc/231227> (цит. на с. 5, 10).

Безкрайномерен комутативен комплексен Банахов $\mathcal{A}$ -анализ

- [Blu55] E. K. Blum, “A theory of analytic functions in Banach algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 78.2 (1955), с. 343–370, DOI: [10.2307/1993068](https://doi.org/10.2307/1993068) (цит. на с. 7).
- [Gli68] B. Glickfeld, “The Riemann sphere of a commutative Banach algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 134.1 (1968), с. 1–28, DOI: [10.2307/1994824](https://doi.org/10.2307/1994824) (цит. на с. 7).
- [Gli70] B. Glickfeld, “Meromorphic functions of elements of commutative Banach algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 151.1 (1970), с. 293–307, DOI: [10.2307/1995629](https://doi.org/10.2307/1995629), URL: <http://www.ams.org/journals/tran/1970-151-01/S0002-9947-1970-0264398-5> (цит. на с. 7).
- [Gli71] B. Glickfeld, “On the inverse function theorem in commutative Banach algebras”, *Illinois J. Math.* 15.2 (1971), с. 212–221, URL: <https://projecteuclid.org/euclid.ijm/1256052709> (цит. на с. 7).
- [Lor43] E. R. Lorch, “The theory of analytic functions in normed abelian vector rings”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 54.3 (1943), с. 414–425, DOI: [10.2307/1990255](https://doi.org/10.2307/1990255) (цит. на с. 7).
- [MMP09] G. V. S. Mauro, L. A. Moraes и A. F. Pereira, “The spectra of algebras of Lorch analytic mappings”, *Topology* 48.2-4 (2009), с. 91–99, DOI: [10.1016/j.top.2009.11.006](https://doi.org/10.1016/j.top.2009.11.006) (цит. на с. 7).
- [MMP16] G. V. S. Mauro, L. A. Moraes и A. F. Pereira, “Topological and algebraic properties of spaces of Lorch analytic mappings”, *Math. Nachr.* 289.7 (2016), с. 335–359, DOI: [10.1002/mana.201400108](https://doi.org/10.1002/mana.201400108) (цит. на с. 7).
- [MP13] L. A. Moraes и A. F. Pereira, “The Hadamard Product in the Space of Lorch Analytic Mappings”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 49.1 (2013), с. 111–122, DOI: [10.4171/PRIMS/98](https://doi.org/10.4171/PRIMS/98) (цит. на с. 7).
- [MP16] L. A. Moraes и A. F. Pereira, “Duality in Spaces of Lorch Analytic Mappings”, *Q. J. Math.* 67.3 (септ. 2016), с. 431–438, DOI: [10.1093/qmath/haw018](https://doi.org/10.1093/qmath/haw018) (цит. на с. 7).

Безкрайномерен комутативен $\mathcal{A}$ -анализ за топологични алгебри и модули, Нелинейни теорема на Serre-Swan

- [Kob87] S. Kobayashi, “Manifolds over function algebras and mapping spaces”, *Tôhoku Math. J.*, 2-я пор. 41.2 (1987), с. 263–282, DOI: [10.2748/tmj/1178227825](https://doi.org/10.2748/tmj/1178227825) (цит. на с. 4, 5).
- [Man17] P. Manoharan, “Geometry of manifolds modeled on Hilbert modules”, *J. Geom.* 108.1 (2017), с. 271–300, DOI: [10.1007/s00022-016-0340-4](https://doi.org/10.1007/s00022-016-0340-4) (цит. на с. 5).
- [Man92] P. Manoharan, “A non-linear version of Swan’s theorem”, *Math. Z.* 209.3 (1992), с. 467–479, DOI: [10.1007/BF02570846](https://doi.org/10.1007/BF02570846), URL: <https://eudml.org/doc/174375> (цит. на с. 5).
- [Man95] P. Manoharan, “Generalized Swan’s theorem and its application”, *Proc. Am. Math. Soc.* 123.10 (1995), с. 3219–3223, DOI: [10.2307/2160685](https://doi.org/10.2307/2160685) (цит. на с. 5).
- [Man98] P. Manoharan, “A characterization for spaces of sections”, *Proc. Am. Math. Soc.* 126.4 (1998), с. 1205–1210, DOI: [10.1090/S0002-9939-98-04246-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04246-4) (цит. на с. 5).
- [Pap92a] M. H. Papatriantafillou, “A Serre-Swan theorem for bundles of topological modules”, *Math. Nachr.* 156 (1992), с. 297–305, DOI: [10.1002/mana.19921560119](https://doi.org/10.1002/mana.19921560119) (цит. на с. 5).
- [Pap92b] M. H. Papatriantafillou, “Differentiation in modules over topological $\ast$ -algebras”, *J. Math. Anal. Appl.* 170.1 (1992), с. 255–275, DOI: [10.1016/0022-247X\(92\)90018-9](https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90018-9) (цит. на с. 5).
- [Pap94] M. H. Papatriantafillou, “A reduction theorem for Hermitian structures on $\mathbb{A}$ -bundles”, *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., A* 8.1 (1994), с. 1–9 (цит. на с. 5).
- [Pap98] M. H. Papatriantafillou, “Partitions of Unity on $\mathbb{A}$ -Manifolds”, *Int. J. Math.* 09.07 (1998), с. 877–883, DOI: [10.1142/S0129167X98000373](https://doi.org/10.1142/S0129167X98000373), URL: <https://doi.org/10.1142/S0129167X98000373> (цит. на с. 5).
- [Pap99a] M. H. Papatriantafillou, “Connections on $\mathbb{A}$ -bundles”, в: *New developments in differential geometry, Budapest 1996. Proceedings of the conference, Budapest, Hungary, July 27–30, 1996*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999, с. 307–316 (цит. на с. 5).
- [Pap99b] M. H. Papatriantafillou, “Bump-functions on certain infinite dimensional manifolds”, *Period. Math. Hung.* 38.3 (1999), с. 223–230, DOI: [10.1023/A:1004810709982](https://doi.org/10.1023/A:1004810709982) (цит. на с. 5).
- [Ped97] P. Pedersen, “Cauchy Integral Theorem on Finitely Generated, Real, Commutative, and Associative Algebras”, *Adv. Math.* 131.2 (1997), с. 344–356, DOI: [10.1006/aima.1997.1671](https://doi.org/10.1006/aima.1997.1671) (цит. на с. 5, 8).

- [Yag19a] H. Yagisita, “Holomorphic differential forms of complex manifolds on commutative Banach algebras and a few related problems” (2019), preprint, URL: <https://arxiv.org/abs/1810.05829> (цит. на с. 4, 5).
- [Yag19b] H. Yagisita, “Finite-dimensional complex manifolds on commutative Banach algebras and continuous families of compact complex manifolds”, *Complex Manifolds* 6.1 (2019), с. 228–264, DOI: [10.1515/coma-2019-0012](https://doi.org/10.1515/coma-2019-0012) (цит. на с. 4, 5).